

Seria GEOMATYKA

1

Wykorzystanie lokalnych współczynników wariancji
w ocenie istotności przemieszczeń
obiektów inżynierskich

Waldemar Gierski, Daria Filipiak-Kowszyk, Karolina Makowska,
Waldemar Kamiński

ISBN 978-83-947357-0-8

Gdańsk, 2016

Redakcja:

Katedra Geodezji
Wydział Inżynierii Lądowej i Środowiska
Politechnika Gdańska

Redakcja naukowa monografii:

dr inż. Paweł Wysocki

Wydawca:

I-NET.PL Sp.J.
ul. Józefa Wassowskiego 19c, 80-225 Gdańsk
www.i-net.pl office@i-net.pl

Afiliacja:

autorzy – Waldemar Gierski¹⁾, Daria Filipiak-Kowszyk¹⁾, Waldemar Kamiński^{1) 2)},
Karolina Makowska¹⁾, redaktorzy – Paweł Wysocki¹⁾

¹⁾ Politechnika Gdańska, Wydział Inżynierii Lądowej i Środowiska.

²⁾ Uniwersytet Warmińsko-Mazurski w Olsztynie, Wydział Geodezji, Inżynierii Przestrzennej i
Budownictwa

Monografia / Praca Naukowa: recenzowana w ramach procedury wydawniczej.

Redaktor prowadzący serii GEOMATYKA: dr inż. Jakub Szulwic.

WYDANIE I

ISBN 978-83-947357-0-8

Dostępny on-line w serwisie www.GEOMATYKA.eu:

<http://www.geomatyka.eu/publikacje/isbn9788394735708/isbn9788394735708.pdf>

Spis treści

Wstęp.....	5
1. Wyznaczanie przemieszczeń obiektów budowlanych w oparciu o geodezyjną osnowę realizacyjną.....	7
1.1. Błędy spostrzeżeń i ich wpływ na dokładność pomiaru.....	7
1.2. Geodezyjna osnowa realizacyjna w lokalnym układzie 3D (X, Y, Z).....	8
2.1. Metody wyznaczania przemieszczeń obiektów budowlanych.....	9
1.3. Wyznaczanie odkształceń obiektów budowlanych.....	11
2. Algorytm wyrównania geodezyjnej osnowy realizacyjnej 3D metodą najmniejszych kwadratów z wykorzystaniem lokalnych współczynników wariancji wyznaczonych metodą Hendersona.....	13
3. Wyznaczenie przemieszczeń wybranych punktów kontrolowanych zadaszania Opery Leśnej w Sopocie oraz ocena ich istotności.....	24
3.1. Konstrukcja zadaszania Opery Leśnej w Sopocie.....	24
3.2. System monitoringu konstrukcji (system monitoringu przemieszczeń).....	26
3.3. Wyznaczenie przemieszczeń poziomych i pionowych wybranych punktów kontrolowanych (z oceną ich istotności) z wykorzystaniem globalnego współczynnika wariancji.....	31
3.3.1. Wyniki pomiarów i przyjęte do obliczeń wartości macierzy i wektorów.....	48
3.4. Wyznaczenie przemieszczeń poziomych i pionowych wybranych punktów kontrolowanych (z oceną ich istotności) z wykorzystaniem metody Hendersona wyznaczania lokalnych współczynników wariancji.....	61
3.4.1. Obliczenia – metoda Hendersona.....	69
4. Podsumowanie.....	92
4.1. Porównanie istotności przemieszczeń wyznaczonych w oparciu wykorzystanie estymatora globalnego współczynnika wariancji oraz z zastosowaniem lokalnych współczynników wariancji.....	92
4.2. Wnioski.....	93
Literatura.....	94
Wykaz rysunków.....	96
Wykaz tabel.....	97

Wstęp

W wielu przypadkach zainteresowanie inżynierów obiektem, który projektowali i którego proces budowy nadzorowali kończyło się w momencie zakończenia budowy i oddania go do eksploatacji. Jednak zdarzają się sytuacje, w których zachowanie konstrukcji jest trudne do przewidzenia i mogą występować nieuwzględnione na etapie projektowania czynniki wpływające na stateczność budowli. W takich sytuacjach niezbędny jest okresowy monitoring techniczny, który pozwala ocenić przemieszczenia konstrukcji w trakcie jej użytkowania. Sprawdzenie zachowania konstrukcji w czasie jej użytkowania może mieć charakter jednokrotnego pomiaru, okresowych pomiarów kontrolnych wykonywanych w określonych interwałach czasu lub obserwacji ciągłych, poprzez zainstalowanie na obiekcie systemu monitoringu konstrukcji. Obecnie coraz częściej można zauważyć ścisłą współpracę pomiędzy projektantami obiektów budowlanych a geodetami w zakresie specjalistycznych pomiarów budowli. Jest to spowodowane zarówno katastrofami budowlanymi występującymi w przeciągu ostatnich lat, jak i faktem, że właściwości obiektu mogą być zmienne w czasie. Także coraz większa powierzchnia nowo powstających obiektów, w których może przebywać znaczna ilość osób oraz nowatorskie rozwiązania konstrukcyjne wpływają na coraz większe zainteresowanie geodezyjnymi systemami monitorowania budowli.

Głównym celem obserwacji stanu budowli jest podniesienie bezpieczeństwa jej użytkowania oraz przedłużenie czasu jej eksploatacji. Poprawnie zaprojektowany i przeprowadzany monitoring pozwala ocenić, czy pod wpływem występujących czynników zewnętrznych, takich jak na przykład obciążenie śniegiem obiekt zachowuje się zgodnie z założeniami projektowymi. Choć koszty specjalistycznych systemów śledzenia stanu konstrukcji są relatywnie duże, to późniejsze korzyści zdecydowanie przemawiają na korzyść stosowania systemów monitorowania budowli – wczesne zauważenie ewentualnych nadmiernych przemieszczeń umożliwia szybką reakcję i pozwala uniknąć awarii lub nawet katastrofy budowlanej.

Metody pomiaru przemieszczeń bardzo ogólnie można podzielić na dwie grupy: pierwszą z nich są pomiary względne, które dostarczają informacji na temat wzajemnych przemieszczeń punktów kontrolowanych na badanym obiekcie, drugą grupą są pomiary bezwzględne, których wyniki dają pogląd na przemieszczenia punktów kontrolowanych względem przyjętego systemu odniesienia (bazy odniesienia i przyjętego układu współrzędnych). Pomiary geodezyjne opisane w niniejszej monografii stanowią pomiary bezwzględne. Przemieszczenia wyznaczone na podstawie obserwacji pomiarów geodezyjnych, nawiązanych do punktów odniesienia, których położenie jest stałe, umożliwiają ich odniesienie do wcześniejszych wyników.

Należy jednak pamiętać, że każda obserwacja geodezyjna może być obarczona błędem przypadkowym, systematycznym lub grubym. Jednym ze sposobów niwelowania wpływu błędów przypadkowych i systematycznych jest wyrównanie sieci geodezyjnej, na przykład metodą najmniejszych kwadratów. Efektem wyrównania będą zarówno wyrównane współrzędne punktów, jak i wyrównane obserwacje podlegające pomiarowi, co pozwoli na wyznaczenie rzeczywistych przemieszczeń. Ważnym etapem obliczeń jest określenie dokładności wyrównania. W niniejszej monografii przeprowadzono wyrównanie metodą najmniejszych kwadratów wraz z określeniem jego dokładności wykorzystując do modelowania macierzy kowariancji globalny współczynnik wariancji oraz lokalne współczynniki wariancji.

W przykładzie obliczeniowym wykorzystano obserwacje pozyskane z systemu monitoringu technicznego zadania Opery Leśnej w Sopocie. Zgodnie z Rozporządzeniem Ministra Infrastruktury z dnia 12.03.2009 roku, zmieniającym rozporządzenie w sprawie warunków technicznych, jakim powinny odpowiadać budynki i ich usytuowanie: *budynki*

użyteczności publicznej (a takim niezaprzeczalnie jest Opera Leśna) z pomieszczeniami przeznaczonymi do przebywania znacznej liczby osób, takie jak hale widowiskowe, sportowe, wystawowe, targowe, handlowe, dworcowe powinny być wyposażone w zależności od potrzeb w urządzenia do stałej kontroli parametrów istotnych dla bezpieczeństwa konstrukcji, takich jak: przemieszczenia, odkształcenia i naprężenia w konstrukcji. Do wyznaczenia przemieszczeń obiektu wykorzystano obserwacje z dwóch epok pomiarowych. Pierwszy pomiar wykonany został 16 stycznia 2014 roku, drugi natomiast 30 czerwca 2014 roku. W pracy zamieszczono analizy dotyczące wyznaczonych przemieszczeń i badania ich istotności dla dwóch wariantów: I – błędy średnie obserwacji wyznaczone zostały w oparciu o globalny współczynnik wariancji, II – błędy średnie obserwacji wyznaczone zostały w oparciu o lokalne współczynniki wariancji dla każdej jednorodnej grupy obserwacji.

1. Wyznaczanie przemieszczeń obiektów budowlanych w oparciu o geodezyjną osnovę realizacyjną

1.1. Błędy spostrzeżeń i ich wpływ na dokładność pomiaru

Wyniki pomiarów wielkości fizycznych, niezbędnych do wykonania obliczeń geodezyjnych, obarczone są szeregiem błędów wywołanych przez wiele czynników. Pomiar geodezyjny będące procesem fizycznym, zawsze podlegają wpływom zewnętrznym, które z kolei wpływają na dokładność pomierzonych wielkości. Nawet stosując instrumenty pomiarowe o wysokiej dokładności, wykonując pomiary starannie i w sprzyjających warunkach, nie jesteśmy w stanie uniknąć różnic między spostrzeżeniami przy wielokrotnym pomiarze tej samej wielkości. Aksjomatem jest zatem, że wszelkie wyniki pomiarów obarczone są pewnymi błędami. Z uwagi na błędy, którymi obciążone są obserwacje, wyniki należy uzgadniać poprzez obliczenie odpowiednich poprawek.

Teoria błędów klasyfikuje błędy spostrzeżeń według różnych kryteriów: w zależności od przyczyn powstania oraz bazując na matematycznych zależnościach. Ze względu na źródło powstania wyróżniamy błędy:

- grube lub omyłki,
- systematyczne,
- przypadkowe.

Podział błędów oparty na matematycznych wzorach dzieli je na prawdziwe i pozorne (poprawki).

Błędy grube (omyłki, przeoczenia) odznaczają się dużą wartością i spowodowane są przekłamaniami w obserwacjach, które wynikają z nieprawidłowego działania sprzętu, błędów w transmisji danych lub braku należytej staranności podczas wykonywania pomiarów. Błędy tego typu wyeliminować można najczęściej poprzez powtórny pomiar kontrolny lub przez zastosowanie specjalnie do tego opracowanych procedur obliczeniowych. Błędy systematyczne wynikają z warunków otoczenia (temperatura, refrakcja, oświetlenie), wad fizycznych narządu wzroku obserwatora, niedostatecznie sprawdzonych instrumentów geodezyjnych (brak rektyfikacji urządzeń, niespełnienie warunków geometrycznych niezbędnych do poprawnej pracy instrumentu) lub wybranej metody pomiaru. W szczególnych przypadkach błędy tego typu mają stały charakter i dają się wyrazić pewnymi wzorami, związanymi z warunkami wykonania pomiarów, za pomocą których możemy je wyeliminować z wykonanych spostrzeżeń (np. poprawki ze względu na temperaturę, komparację łąt niwelacyjnych itp.). Błędy przypadkowe są to błędy popełniane przy zachowaniu należytej staranności wykonywania pomiarów (dotyczą również błędów automatycznie wykonywanych obserwacji). Błędy tego typu mają z równym prawdopodobieństwem znak plus lub minus, a ich geneza nie jest możliwa do ustalenia. Zmieniają się w czasie wykonywania pomiarów zarówno co do wielkości, jak i znaku. Nawet, gdyby znane były przyczyny ich występowania, wyznaczenie wielkości, jak i znaku powodowanego przez nie błędu nie byłoby możliwe. Występują we wszystkich wynikach pomiarów, dlatego kilkukrotna obserwacja tej samej wielkości fizycznej nie przynosi identycznego wyniku – pozwala jednak podnieść dokładność obserwacji. To właśnie błędy przypadkowe są przedmiotem zainteresowania rachunku wyrównawczego i to ich wpływ na wyznaczenie współrzędnych redukujemy w procesie wyrównania poprzez obliczenie takich poprawek do wykonanych spostrzeżeń, aby ich poprawione wielkości spełniały określone zależności.

Błędem prawdziwym (ε) nazywamy różnicę między wartością pomierzoną wielkości fizycznej i jej wartością rzeczywistą :

$$\varepsilon = L - L_{rz} \quad (1.1)$$

gdzie:

L – wartość pomierzona,

L_{rz} – wartość prawdziwa wielkości mierzonej.

Wartości prawdziwe wielkości pomierzonej nie są zazwyczaj znane, znana jest jedynie wartość pomierzona, dlatego nie znamy błędu prawdziwego pojedynczego spostrzeżenia. W rozważaniach geodezyjnych dąży się do uzyskania wartości najbliższych wartości rzeczywistej, są to wartości wyrównane, czyli najbardziej prawdopodobne.

Poprawka V (gdzie $V = -\varepsilon$), nazywana często błędem pozornym, jest różnicą między pomierzoną i wyrównaną wartością obserwacji:

$$-V = L - L_{wyr} \quad (1.2)$$

gdzie:

L_{wyr} – wartość wyrównana wielkości mierzonej.

Przekształcając zależność (1.2), poprawka V stanowi wartość, którą należy dodać do wartości pomierzonej obserwacji, aby otrzymać jej wartość wyrównaną:

$$L + V = L_{wyr} \quad (1.3)$$

Poprawki uzależnione są od wyników pomiarów (wartość wyrównania może przybierać różne wielkości wraz ze zmianą ilości spostrzeżeń lub zmianą wyników, ale dla ustalonego już raz szeregu spostrzeżeń jest ona zawsze jednoznacznie określona), więc mogą być wykorzystane w procesie do oceny dokładności rezultatów estymacji.

1.2. Geodezyjna osnowa realizacyjna w lokalnym układzie 3D (X, Y, Z)

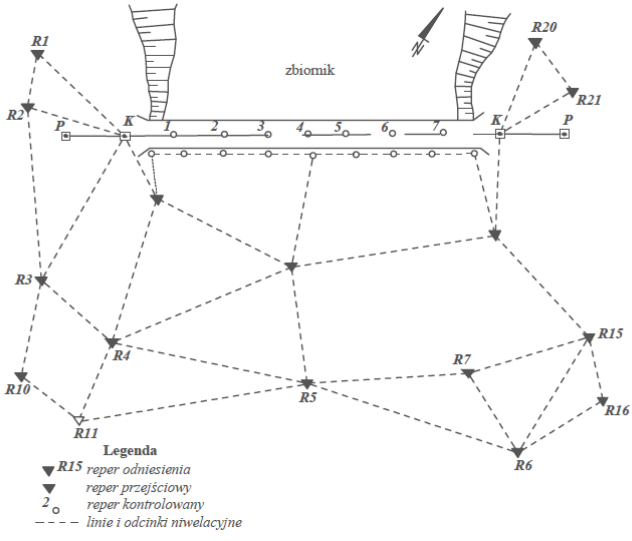
Przez pojęcie osnowy geodezyjnej rozumiemy [14] usystematyzowany zbiór punktów, utrwalonych w terenie znakami geodezyjnymi, dla których wzajemne położenie i dokładność jego wyznaczenia określono matematycznie. Punkty osnowy tworzą sieci geodezyjne. Siecią geodezyjną nazywamy zbiór punktów, stanowiących odrębną całość, odznaczających się jednorodnymi metodami pomiaru ich położenia.

W celu monitorowania przemieszczeń budowli inżynierskich na obiektach lub terenach inwestycji wykorzystuje się istniejącą osnowę lub zakłada osnowę realizacyjną. Osnowa trójwymiarowa, dalej nazywana osnową 3D, składa się z punktów, których współrzędne płaskie (X, Y) i współrzędna wysokościowa (Z) są ze sobą powiązane (występują w ramach tego samego układu odniesienia).

Prawidłowe zaprojektowanie osnowy realizacyjnej obiektu budowlanego jest niezwykle istotne w procesie monitoringu przemieszczeń. Punkty osnowy służącej zdefiniowaniu układu odniesienia, który pozwala na określanie przemieszczeń punktów kontrolowanych w sposób umożliwiający ich porównanie w kolejnych epokach pomiarowych, powinny być zlokalizowane poza obszarem oddziaływania badanej konstrukcji – zwiększy to prawdopodobieństwo zachowania stałości ich wzajemnego położenia (punkty tworzące osnowę – bazę odniesienia dla pomiarów, nie powinny doznawać wzajemnych przemieszczeń przekraczających przyjęte kryterium stałości wzajemnego położenia). W obszarze tym nie powinny występować czynniki utrudniające porównywanie wyznaczanych przemieszczeń jako wartości dyskretnych w określonych momentach. Jednym słowem, pomiar wyjściowy powinien być obciążony takimi samymi błędami, jak kolejne pomiary przemieszczeń (w kolejnych epokach) z uwzględnieniem przyjętego kryterium różnicy tych błędów (ze względu na dynamicznie zmieniające się warunki pomiarów).

W procesie projektowania osnowy realizacyjnej istotną rolę odgrywa geometria sieci. Badany obiekt powinien znajdować się wewnątrz figury geometrycznej, której wierzchołkami

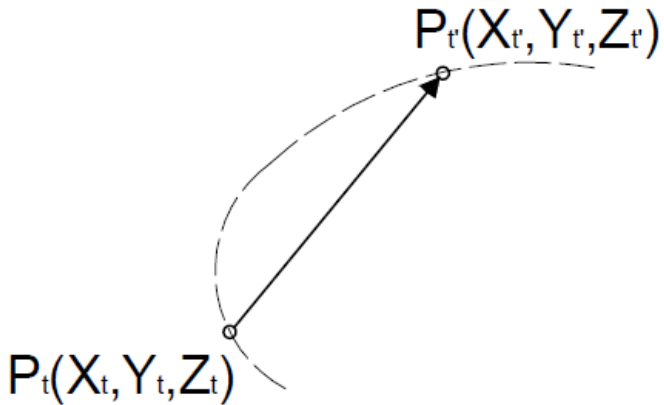
są punkty osnowy. Lokalizacja punktów powinna gwarantować widoczność z każdego z nich co najmniej dwóch sąsiednich punktów osnowy. Odległości między punktami determinowane są warunkami terenowymi, charakterystyką dokładnościową instrumentów, którymi wykonywane są pomiary oraz przyjętymi założeniami dokładnościowymi wybranej metody pomiaru. Na rys. 1.1. przedstawiono przykładową osnowę realizacyjną wysokościową dla zapory wodnej. Zgodnie z zaleceniami obowiązującymi przy projektowaniu osnow, repery odniesienia zlokalizowano w strefie wolnej od oddziaływania konstrukcji na teren, w miejscach gwarantujących stałość ich położenia, natomiast repery kontrolowane (w oparciu, o które dokonuje się wyznaczenia przemieszczeń konstrukcji) na samej konstrukcji.



Rys. 1.1. Sieć niwelacyjna usytuowana na przedpolu zapory (źródło: [3])

2.1. Metody wyznaczania przemieszczeń obiektów budowlanych

Przez przemieszczenie bezwzględne punktu obiektu lub elementu konstrukcyjnego rozumiemy zmianę jego położenia względem przyjętego układu odniesienia w określonym przedziale czasu. Wyrażamy je za pomocą składowych przemieszczeń (składowe poziome: $\Delta X, \Delta Y$, składowa pionowa: ΔZ), które są elementami wektora przemieszczenia, łączącego położenie punktu w momencie początkowym $P_t(X_t, Y_t, Z_t)$ z jego położeniem w momencie końcowym $P_{t'}(X_{t'}, Y_{t'}, Z_{t'})$ w rozpatrywanym przedziale czasu (rys. 2.1).



Rys. 1.2. Wektor przemieszczenia punktu P w przedziale czasu $t - t'$ (źródło: [12])

Układ odniesienia stanowi baza odniesienia oraz przyjęty układ współrzędnych. Bazą odniesienia nazywamy *odpowiednio liczny zbiór punktów materialnych, spełniających określone kryterium stałości wzajemnego położenia, względem których mogą być wyznaczane przemieszczenia innych punktów* [12]. Bazą minimalną dla przestrzeni 3D jest zbiór trzech punktów referencyjnych. Układ współrzędnych to pomocnicze założenie, które związek z rzeczywistością fizyczną zyskuje dopiero w momencie powiązania go z bazą odniesienia. Jeżeli baza odniesienia utworzona jest wyłącznie na punktach badanej konstrukcji, nazywamy ją własną bazą odniesienia. Układ odniesienia oparty na własnej bazie odniesienia i lokalnym układzie współrzędnych nazywamy własnym układem odniesienia.

Wyniki pomiarów geodezyjnych informują o dynamice przemieszczeń elementów obiektu umożliwiając prognozę występowania ewentualnych usterek czy awarii. Przemieszczenia wyznaczane są jako funkcje spostrzeżeń geodezyjnych pomiaru wyjściowego i aktualnego. Pomiar geodezyjne można podzielić na prace realizowane w etapach projektowania, budowy i eksploatacji.

Jak już wspomniano, geodezyjne pomiary przemieszczeń są głównie pomiarami bezwzględными. Najczęściej realizuje się je za pomocą następujących metod:

- niwelacji geometrycznej,
- metody trygonometrycznej,
- metody stałej prostej,
- metod fotogrametrycznych,
- metod GNSS.

Podczas pomiaru geodezyjnego wyznaczane jest położenie punktów kontrolowanych w nawiązaniu do punktów odniesienia. Punktami odniesienia (referencyjnymi) nazywamy *znaki pomiarowe osadzone w miejscach zapewniających stałość ich wzajemnego położenia, służące do zrealizowania układu odniesienia do wyznaczania przemieszczeń punktów kontrolowanego obiektu* [12]. Punkty kontrolowane to *sygnalizowane punkty pomiarowe osadzone na kontrolowanym obiekcie bądź dobrze identyfikowalne punkty wybrane na charakterystycznych elementach obiektu, których przemieszczenia podlegają wyznaczaniu* [12]. Przez pomiar rozumie się rejestrację wartości wielkości fizycznych, takich jak na przykład: odległości przestrzenne, kierunki poziome, kąty pionowe.

W niniejszej monografii do wyznaczania przemieszczeń zastosowano metodę różnic współrzędnych. W pojęciu metody wyznaczania przemieszczeń mieści się cały szereg czynności, których wykonanie jest niezbędne do określenia zmian położenia punktów, w tym głównie:

- sprawdzenie poprawności zarejestrowanych przez instrument pomiarowy spostrzeżeń,
- określenie układu odniesienia poprzez wybór bazy odniesienia i zorientowanie poszczególnych osi układu współrzędnych,
- obliczenie w przyjętym układzie odniesienia składowych wektorów przemieszczeń punktów objętych kontrolą i określenie dokładności wyznaczonych zmian położenia,
- ocena istotności wyznaczonych przemieszczeń.

Wykorzystana w obliczeniach metoda różnic współrzędnych polega na obliczeniu, na podstawie wyrównanych metodą najmniejszych kwadratów obserwacji, współrzędnych punktów kontrolowanych w dwóch epokach pomiarowych. Pierwsza epoka stanowi pomiar wyjściowy. Wyniki obserwacji z drugiej epoki (pomiar aktualny) odnoszone są do pomiaru wyjściowego.

Odpowiednia interpretacja wyznaczonych przemieszczeń punktów kontrolowanych pozwala na ocenę zachowania się bryły obiektu. Zbiór przemieszczeń wraz z ich charakterystyką dokładnościową stanowi podstawowy produkt geodezyjnych pomiarów przemieszczeń. Odpowiednio go przekształcając można:

- wyznaczyć parametry przemieszczenia bryły obiektu (przy założeniu jej sztywności), mające odwzorowywać efekty odkształcenia się tej bryły,
- aproksymować wektorowe pole przemieszczeń, umożliwiające znalezienie przemieszczeń w punktach, których pomiar nie obejmował,
- aproksymować wektorowe pole przemieszczeń, przy założeniu sztywności bryły obiektu i pozyskać parametry przemieszczenia bryły obiektu oraz wyznaczyć obroty i składowe stanu odkształcenia w wybranych punktach bryły.

1.3. Wyznaczanie odkształceń obiektów budowlanych

Odkształceniem (deformacją) bryły obiektu nazywa się *zmianę wzajemnego położenia niezdeformowanej bryły obiektu, nienaruszającą jej ciągłości materiałowej* (to znaczy bez występowania zarysowań czy pęknięć) [12].

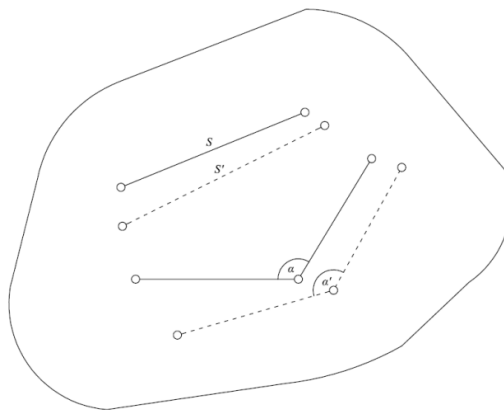
Mając na uwadze założenia mechaniki ośrodka ciągłego zmiana wzajemnego położenia punktów ciała (wywołana występowaniem pewnych oddziaływań fizycznych) określana jest jako zmiana konfiguracji tego ciała, przy założeniu, że charakteryzuje ją ciągłość, to znaczy że punkty będące sąsiednimi przed wystąpieniem odkształcenia, pozostają sąsiednimi po odkształceniu.

Odkształcenie jako zmianę położenia punktów obiektu można scharakteryzować przy użyciu wzajemnych odległości między punktami bryły oraz zmian wartości kątów między liniami łączącymi te punkty. Stąd jako wskaźniki świadczące o zaistnieniu odkształcenia można wymienić:

- znalezienie punktów bryły obiektu, których wzajemna odległość uległa zmianie w rozpatrywanym przedziale czasu,
- znalezienie punktów bryły obiektu, pomiędzy którymi zmienił się kąt określony między łączącymi je liniami w rozpatrywanym przedziale czasu.

Wymienione powyżej wskaźniki można traktować jako dowód wystąpienia odkształcenia bryły obiektu tylko wtedy, jeżeli spełnione są warunki ciągłości materiałowej tej bryły.

Odkształcenia można charakteryzować stosując różne kryteria. Jednym z nich jest kryterium mówiące o zachowaniu konstrukcji po zdjęciu obciążenia odkształcającego. Jeżeli po zdjęciu obciążenia bryła wraca do pierwotnej postaci, tzn. całkowicie zanika odkształcenie, to odkształcenie takie nazywa się sprężystym. Jeśli po zdjęciu obciążenia odkształcającego, odkształcenie nie zanika, to jest to odkształcenie plastyczne. Inny podział odkształceń związany jest z kształtem i objętością bryły. Gdy pod wpływem obciążenia bryła zmienia swoją objętość (występują zmiany we wszystkich wymiarach bryły), odkształcenie nazywa się objętościowym. Natomiast, jeżeli rozpatrywana jest zmiana kształtu tylko w jednym wymiarze (odkształcenie liniowe), to mówi się o odkształceniu postaciowym.



Rys. 1.3. Zmiana odległości S oraz zmiana kąta α na skutek odkształcenia się bryły (źródło: [12])

W odniesieniu do rys. 1.3. zmiana odległości $\Delta S = S' - S$, zaś zmiana kąta wyrażana jest zależnością $\Delta\alpha = \alpha' - \alpha$.

Wskaźnikami odkształcenia będą więc:

- względne wydłużenie $\Delta S / S$ (odkształcenie liniowe),
- zmiana kąta $\Delta\alpha$ (odkształcenie postaciowe).

Zmiany geometrii budowli (zmiany wymiarów liniowych oraz parametrów kształtu) wyznaczone metodami geodezyjnymi pozwalają na określenie globalnych wskaźników odkształceń bryły obiektu. Pomiar geodezyjne pozwalają ocenić zaistnienie odkształcenia, jednak nie pozwalają ocenić charakteru i wielkości deformacji w poszczególnych punktach bryły obiektu. Stosując pomiar geodezyjny o wystąpieniu odkształcenia można wnioskować na podstawie bezpośredniego pomiaru S i S' oraz α i α' (rys. 1.3.), pomiaru wektorów przemieszczeń wyznaczonych w oparciu o własny dla badanego obiektu układ odniesienia (zlokalizowany na badanym obiekcie) oraz przez wyznaczenie tych wektorów w oparciu o zewnętrzny układ odniesienia (zlokalizowany poza badanym obiektem).

2. Algorytm wyrównania geodezyjnej osnowy realizacyjnej 3D metodą najmniejszych kwadratów z wykorzystaniem lokalnych współczynników wariacji wyznaczonych metodą Hendersona

Istotną rolę w zastosowaniu statystyki matematycznej do nauk technicznych pełni metoda najmniejszych kwadratów. Jest ona także jedną z najczęściej wykorzystywanych metod w rachunku wyrównawczym. Głównym założeniem metody jest spełnienie przez estymator wektora poprawek $\hat{\mathbf{V}}$ do rezultatów pomiaru \mathbf{x}^{pom} poniższego kryterium optymalizacyjnego:

$$\hat{\mathbf{V}}^T \mathbf{P} \hat{\mathbf{V}} = \min \quad (2.1)$$

gdzie:

\mathbf{P} – macierz wag.

Tak sformułowane kryterium optymalizacyjne (2.1) wykorzystywane jest przy wyrównaniu obserwacji jednorodnych (np. kątów poziomych w sieciach kątowych czy odległości między punktami sieci liniowej) oraz obserwacji o jednakowej dokładności (gdzie błąd średni m jest jednakowy w przypadku wszystkich grup obserwacji).

Zakładając następujący układ równań obserwacyjnych:

$$\mathbf{x} = \mathbf{F}(\mathbf{X}) \quad (2.2)$$

gdzie:

\mathbf{x} – wektor wartości prawdziwych wielkości mierzonych,

\mathbf{X} – wektor przyjętych parametrów modelu.

Oraz $\mathbf{x} = \mathbf{x}^{pom} + \mathbf{V}$, gdzie \mathbf{x}^{pom} to wektor obserwacji o postaci $[x_1^{pom}, \dots, x_n^{pom}]^T$ (n – liczba obserwacji), a \mathbf{V} to wektor poprawek do wyniku pomiaru.

Powyzsza zależność (2.2) powinna być spełniona zarówno przez \mathbf{x} i \mathbf{X} , jak i ich estymatory – $\hat{\mathbf{x}}$ i $\hat{\mathbf{X}}$. Przy założeniu, że wektor wyrównanych wyników pomiaru $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^{pom} + \hat{\mathbf{V}}$, równanie (2.2) przyjmie postać $\mathbf{F}(\hat{\mathbf{X}}) = \mathbf{x}^{pom} + \hat{\mathbf{V}}$. Zatem estymator wektora poprawek wyznaczany jest ze wzoru (2.3):

$$\hat{\mathbf{V}} = \mathbf{F}(\hat{\mathbf{X}}) - \mathbf{x}^{pom} \quad (2.3)$$

Funkcje $\mathbf{F}(\hat{\mathbf{X}})$ występujące w powyższej zależności są najczęściej funkcjami nieliniowymi. Zatem realizując obliczenia metodą najmniejszych kwadratów, funkcje te należy rozwinąć w szereg Taylora z ograniczeniem do pierwszych wyrazów rozwinięcia.

W pobliżu punktu \mathbf{X}^0 , liniowe rozwinięcie można przedstawić zgodnie ze wzorem (2.4):

$$\hat{\mathbf{V}} = \left. \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^0} \hat{\mathbf{d}}_{\mathbf{x}} + \mathbf{F}(\mathbf{X}^0) - \mathbf{x}^{pom} \quad (2.4)$$

Zatem model funkcjonalny można zapisać w postaci macierzowej następująco:

$$\hat{\mathbf{V}} = \mathbf{A} \hat{\mathbf{d}}_{\mathbf{x}} + \mathbf{L} \quad (2.5)$$

gdzie:

\mathbf{A} – macierz współczynników $\left. \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^0}$,

\mathbf{L} – wektor wyrazów wolnych wyznaczany jako $\mathbf{F}(\mathbf{X}^0) - \mathbf{x}^{pom}$,

$\hat{\mathbf{d}}_{\mathbf{x}}$ – estymator wektora przyrostów.

Zatem zadanie optymalizacyjne dla metody najmniejszych kwadratów można sformułować jak poniżej:

$$\hat{\mathbf{C}}_{\mathbf{x}^{pom}} = \hat{\sigma}_0^2 \mathbf{Q}_L = \hat{\sigma}_0^2 \mathbf{P}^{-1} \left| \begin{array}{l} \hat{\mathbf{V}} = \mathbf{A} \hat{\mathbf{d}}_{\mathbf{x}} + \mathbf{L} \\ \hat{\mathbf{V}}^T \mathbf{P} \hat{\mathbf{V}} = \min \end{array} \right. \quad (2.6)$$

gdzie:

$\hat{\sigma}_0^2 = m_0^2$ – estymator globalnego współczynnika wariancji.

W zadaniu (2.6) model statystyczny przedstawia estymator macierzy kowariancji $\hat{\mathbf{C}}_{\mathbf{x}^{pom}}$. Jako \mathbf{Q}_L oznaczono macierz kofaktorów o postaci $\mathbf{Q}_L = \text{Diag}(m_{(ap)1}^2, m_{(ap)2}^2, \dots, m_{(ap)n}^2)$, przy czym jako $m_{(ap)i}$ oznaczono przyjęte a priori błędy średnie obserwacji ($i = 1, \dots, n$; n – liczba obserwacji). Zakładając wartość estymatora globalnego współczynnika wariancji równą 1, macierz kowariancji równa jest macierzy kofaktorów ($\hat{\mathbf{C}}_{\mathbf{x}^{pom}} = \mathbf{Q}_{\mathbf{x}^{pom}}$). W obliczeniach metodą najmniejszych kwadratów najczęściej wykorzystywana jest macierz wag o postaci $\mathbf{P} = \text{Diag}(p_1, p_2, \dots, p_n)$.

Zazwyczaj do rozwiązania zadania geodezyjnego wykorzystujemy wykonane z różnymi dokładnościami obserwacje. W takim przypadku mówimy o spostrzeżeniach niejednakowo dokładnych. Aby wyrównanie było możliwe konieczne jest odpowiednie określenie ich wag (2.7):

$$p_i = \frac{1}{m_{(ap)i}^2} \quad (2.7)$$

W kolejnym kroku obliczany jest estymator wektora przyrostów $\hat{\mathbf{d}}_{\mathbf{x}}$ do przybliżonych wartości parametrów modelu $\mathbf{X}^0 = [X_1^0, \dots, X_k^0]^T$ (k – liczba parametrów modelu, nieznanymi współrzędnymi punktów). Wektor $\hat{\mathbf{d}}_{\mathbf{x}}$ uzyskuje się z zależności (2.8):

$$\hat{\mathbf{d}}_{\mathbf{x}} = -(\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{L} \quad (2.8)$$

Estymator wektora przyrostów $\hat{\mathbf{d}}_{\mathbf{x}}$ posłuży następnie do obliczenia estymatora wektora poprawek $\hat{\mathbf{V}}$ zgodnie ze wzorem (2.5).

Ocenę dokładności otrzymanych wyników wyrównania przeprowadza się w oparciu o macierz kowariancji $\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{x}}}$ wyrównanych parametrów $\hat{\mathbf{X}}$, która wyznaczana jest ze wzoru:

$$\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{x}}} = m_0^2 \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} \quad (2.9)$$

gdzie $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}}$ jest macierzą kofaktorów o postaci:

$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \quad (2.10)$$

W przeprowadzanych analizach dokładności szczególną rolę odgrywa współczynnik m_0^2 . Wartość globalnego współczynnika m_0^2 obliczana jest zgodnie z formułą:

$$m_0^2 = \frac{\hat{\mathbf{V}}^T \mathbf{P} \hat{\mathbf{V}}}{n - k} \quad (2.11)$$

Uzyskaną z równania (2.11) wielkość współczynnika m_0^2 determinują m.in. wartości błędów średnich pomiaru, przyjęte z założenia (na przykład na podstawie specyfikacji urządzeń pomiarowych). Wyznaczony w trakcie wyrównania współczynnik m_0^2 pozwala wnioskować co do prawidłowości oszacowania błędów średnich zbiorów obserwacji. Stąd:

- $m_0^2 = 1$ – przyjęto prawidłowe wartości błędów średnich pomiaru,
- $m_0^2 < 1$ – zawyżono wartości błędów średnich pomiaru *a priori*,
- $m_0^2 > 1$ – zaniżono wartości błędów średnich pomiaru *a priori*.

W przypadku niejednorodnych sieci geodezyjnych analiza wartości współczynnika m_0^2 , a co za tym idzie także ocena poprawności przyjętych z założenia błędów średnich obserwacji, nie jest prosta. Trudność oceny wartości przyjętych wag wynika z obecności w obliczeniach różnych pod względem charakteru pomiarów zbiorów obserwacji (np. odległości i kąty). W przypadku, gdy wartość współczynnika m_0^2 jest różna od 1, aby wyznaczyć najbardziej prawdopodobne błędy średnie poszczególnych grup obserwacji, wykorzystuje się lokalne współczynniki wariancji.

Koncepcja lokalnych współczynników wariancji polega na podziale wyników pomiarów na jednorodne grupy o takim samym charakterze (np. odległości przestrzenne, kąty poziome, kąty pionowe) i określeniu dla nich estymatorów lokalnych współczynników wariancji $\hat{\sigma}_{0i}^2 = m_{0i}^2$ ($i = 1, \dots, \bar{n}$, gdzie \bar{n} to ilość jednorodnych grup obserwacji). Lokalne współczynniki wariancji i obliczone na ich podstawie macierze kowariancji pozwalają określić prawidłowość przyjętych *a priori* błędów średnich każdej z grup obserwacji, jak również oszacować wartości średnich błędów pomiaru *a posteriori* w bardziej wiarygodny sposób niż ich szacowanie na podstawie jednego globalnego współczynnika wariancji m_0^2 . Analiza dokładności wyrównania obserwacji przy zastosowaniu jedynie estymatora globalnego współczynnika wariancji, w przypadku sieci niejednorodnych, może fałszować obraz poprawności przeprowadzonego wyrównania i powodować wyciąganie nietrafnych wniosków dotyczących pomiaru. Procedura estymacji z wykorzystaniem lokalnych współczynników wariancji realizowana jest iteracyjnie sprawdzając, czy spełniona jest poniższa relacja:

$$m_{01}^2 \cong m_{02}^2 \cong \dots \cong m_{0\bar{n}}^2 \cong m_0^2 \cong 1 \quad (2.12)$$

Jeżeli w wyniku wyrównania uzyskano estymatory lokalnych współczynników wariancji oraz wartość globalnego estymatora współczynnika wariancji spełniające zależność (2.12) wnioskuje się, że wartości błędów średnich dla jednorodnych grup pomiaru uzyskane dla danej iteracji są prawidłowe.

W niniejszej monografii do wyznaczania estymatorów lokalnych współczynników wariancji zastosowano metodę Hendersona przedstawioną m.in. w pracach [5, 17, 18, 19]. W oparciu o cytowane wyżej prace przedstawiona zostanie procedura wyznaczania tych współczynników.

Estymacja lokalnych współczynników wariancji metodą Hendersona polega na rozwiązaniu względem $\sigma_{01}^2, \dots, \sigma_{0\bar{n}}^2$ układu równań (2.13):

$$E\{\hat{\mathbf{V}}^T \mathbf{H}_i \hat{\mathbf{V}}\} = \hat{\mathbf{V}}^T \mathbf{H}_i \hat{\mathbf{V}} \quad (2.13)$$

gdzie:

$i = 1, \dots, \bar{n}$ – liczba jednorodnych grup zbiorów obserwacji,

$E\{\bullet\}$ – wartość oczekiwana,

$\hat{\mathbf{V}} = \mathbf{B}\mathbf{V}$ – estymator wektora poprawek,

$\mathbf{B}^T = [\mathbf{B}_1^T \ \dots \ \mathbf{B}_{\bar{n}}^T]$ – macierz przejścia z poprawek na estymatory poprawek.

Macierze \mathbf{H}_i powinny być tak określone, aby spełniony był warunek:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{B}^T \mathbf{H}_i \mathbf{B} \mathbf{A} = 0 \quad (2.14)$$

co pozwoli na uzyskanie nieobciążonych estymatorów lokalnych współczynników wariancji bez względu na przyjęte *a priori* błędy obserwacji, tzn. $E\{\hat{\sigma}_{0i}^2\} = \sigma_{0i}^2$.

W zależności (2.14) macierze \mathbf{H}_i można przedstawić następująco:

$$\mathbf{H}_i = \mathbf{D}_i \mathbf{P} \quad (2.15)$$

gdzie:

$$\mathbf{D}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D}_2 = \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ & \mathbf{I}_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D}_{\bar{n}} = \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \mathbf{I}_{\bar{n}} \end{bmatrix}$$

oraz \mathbf{I}_i – macierz jednostkowa o ilości kolumn i wierszy równej r (r – liczba obserwacji w jednorodnej grupie), $i = 1, \dots, \bar{n}$.

Można zauważyć, że jeśli zgodnie z zależnością (2.15) $\mathbf{H}_i = \mathbf{D}_i \mathbf{P}$ to:

$$\hat{\mathbf{V}}^T \mathbf{H}_i \hat{\mathbf{V}} = \hat{\mathbf{V}}^T \mathbf{D}_i \mathbf{P} \hat{\mathbf{V}} = \hat{\mathbf{V}}_i^T \mathbf{P}_i \hat{\mathbf{V}}_i = \hat{f}_i \quad (2.16)$$

Zatem układ równań (2.15) można zapisać również jako:

$$E\{\hat{f}_i\} = \hat{f}_i \quad (2.17)$$

Z własności wartości oczekiwanej formy kwadratowej układ równań (2.17) można zapisać jako:

$$E\{\hat{f}_i\} = E\{\hat{\mathbf{V}}_i^T \mathbf{P}_i \hat{\mathbf{V}}_i\} = \text{Tr}(\mathbf{P}_i \mathbf{C}_{\hat{\mathbf{V}}_i}) + E\{\hat{\mathbf{V}}_i^T\} \mathbf{P}_i E\{\hat{\mathbf{V}}_i\} \quad (2.18)$$

gdzie:

$\text{Tr}(\bullet)$ – ślad macierzy,

$\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{V}}_i}$ – macierz kowariancji wektora poprawek $\hat{\mathbf{V}}_i$.

Ze względu na to, że estymatory $\hat{\mathbf{V}}_i$ są nieobciążone, czyli $E\{\hat{\mathbf{V}}_i\} = E\{\mathbf{V}_i\} = 0$ układ równań (2.18) redukuje się do następującej postaci:

$$E\{\hat{f}_i\} = E\{\hat{\mathbf{V}}_i^T \mathbf{P}_i \hat{\mathbf{V}}_i\} = \text{Tr}(\mathbf{P}_i \mathbf{C}_{\hat{\mathbf{V}}_i}) \quad (2.19)$$

przy czym iloczyn macierzy $\mathbf{P}_i \mathbf{C}_{\hat{\mathbf{V}}_i}$ można zapisać jako (2.20):

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_i \mathbf{C}_{\hat{\mathbf{V}}_i} &= \sigma_{0i}^2 \begin{pmatrix} \mathbf{I}_i - 2\mathbf{P}_i \mathbf{T}_{ii} \\ r_i, r_i \end{pmatrix} + \sum_{j=1}^{\bar{n}} \sigma_{0i}^2 \mathbf{P}_i \mathbf{T}_{ij} \mathbf{P}_j \mathbf{T}_{ji} = \sigma_{0i}^2 \begin{pmatrix} \mathbf{I}_i - 2\mathbf{P}_i \mathbf{T}_{ii} + \mathbf{P}_i \mathbf{T}_{ii} \mathbf{P}_i \mathbf{T}_{ii} \\ r_i, r_i \end{pmatrix} + \\ &+ \sum_{j=1}^{i-1} \sigma_{0j}^2 \mathbf{P}_i \mathbf{T}_{ii} \mathbf{P}_j \mathbf{T}_{jj} + \sum_{j=i+1}^{\bar{n}} \sigma_{0i}^2 \mathbf{P}_i \mathbf{T}_{ij} \mathbf{P}_j \mathbf{T}_{ji} \end{aligned} \quad (2.20)$$

gdzie macierz \mathbf{T} wyrażona jest wzorem:

$$\mathbf{T} = \mathbf{A}\mathbf{Q}_X\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{A}_{\bar{n}} \end{bmatrix} \mathbf{Q}_X \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^T & \mathbf{A}_2^T & \cdots & \mathbf{A}_{\bar{n}}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{11} & \mathbf{T}_{12} & \cdots & \mathbf{T}_{1\bar{n}} \\ \mathbf{T}_{21} & \mathbf{T}_{21} & \cdots & \mathbf{T}_{2\bar{n}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{T}_{\bar{n}1} & \mathbf{T}_{\bar{n}2} & \cdots & \mathbf{T}_{\bar{n}\bar{n}} \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

oraz

$$\mathbf{T}_{ij} = \mathbf{A}_i\mathbf{Q}_X\mathbf{A}_j^T = \mathbf{T}_{ji}^T \quad (2.22)$$

Aby wyznaczyć ślad macierzy $\mathbf{P}_i\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{V}}_i}$ należy określić wartość poniższych współczynników:

$$t_i = \text{Tr}(\mathbf{I}_i) \quad (2.23)$$

$$u_i = \text{Tr}(\mathbf{P}_i\mathbf{T}_{ii}) = \text{Tr}(\mathbf{P}_i\mathbf{A}_i\mathbf{Q}_X\mathbf{A}_i^T) = \text{Tr}(\mathbf{A}_i^T\mathbf{P}_i\mathbf{A}_i\mathbf{Q}_X) = \text{Tr}(\mathbf{N}_{ii}\mathbf{Q}_X) \quad (2.24)$$

$$e_i = \text{Tr}(\mathbf{P}_i\mathbf{T}_{ii}\mathbf{P}_i\mathbf{T}_{ii}) = \text{Tr}(\mathbf{N}_{ii}\mathbf{Q}_X\mathbf{N}_{ii}\mathbf{Q}_X) \quad (2.25)$$

$$c_{ij} = \text{Tr}(\mathbf{P}_i\mathbf{T}_{ij}\mathbf{P}_j\mathbf{T}_{ji}) = \text{Tr}(\mathbf{A}_i^T\mathbf{P}_i\mathbf{A}_i\mathbf{A}_j^T\mathbf{P}_j\mathbf{A}_j\mathbf{Q}_X\mathbf{Q}_X) = \text{Tr}(\mathbf{N}_{ii}\mathbf{Q}_X\mathbf{N}_{jj}\mathbf{Q}_X) \quad (2.26)$$

Korzystając ze współczynników wyznaczonych wzorami (2.23), (2.24), (2.25) i (2.26) możemy zapisać :

$$\text{Tr}(\mathbf{P}_i\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{V}}_i}) = g_i\hat{\sigma}_{0i}^2 + \sum_{j=1}^{i-1} \hat{\sigma}_{0j}^2 c_{ij} + \sum_{j=i+1}^{\bar{n}} \hat{\sigma}_{0j}^2 c_{ij} \quad (2.27)$$

gdzie:

$$g_i = t_i - 2u_i + e_i$$

Równanie (2.27) można sprowadzić do następującej postaci:

$$\mathbf{F}\hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{f}} \quad (2.28)$$

gdzie:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} g_1 & c_{12} & \cdots & c_{1\bar{n}} \\ c_{21} & g_2 & \cdots & c_{2\bar{n}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{\bar{n}1} & c_{\bar{n}2} & \cdots & g_{\bar{n}} \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{f}} = \begin{bmatrix} \hat{f}_1 = \hat{\mathbf{V}}_1^T \mathbf{P}_1 \hat{\mathbf{V}}_1 \\ \hat{f}_2 = \hat{\mathbf{V}}_2^T \mathbf{P}_2 \hat{\mathbf{V}}_2 \\ \vdots \\ \hat{f}_{\bar{n}} = \hat{\mathbf{V}}_{\bar{n}}^T \mathbf{P}_{\bar{n}} \hat{\mathbf{V}}_{\bar{n}} \end{bmatrix}$$

Przekształcając zależność (2.28) otrzymuje się wzór na wektor lokalnych współczynników wariancji:

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{F}^{-1} \hat{\mathbf{f}} \quad (2.29)$$

o postaci:

$$\hat{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_{01}^2 \\ \hat{\sigma}_{02}^2 \\ \vdots \\ \hat{\sigma}_{0\bar{n}}^2 \end{bmatrix}$$

Określone w ten sposób lokalne współczynniki wariancji urealniają wartości błędów średnich zrealizowanych obserwacji.

Estymacja metodą najmniejszych kwadratów z wykorzystaniem lokalnych współczynników wariancji jest procesem iteracyjnym przebiegającym następująco:

$$\left. \begin{aligned} \hat{\mathbf{d}}_{\mathbf{x}}^{(\omega)} &= -(\mathbf{A}^T \mathbf{P}^{(\omega-1)} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P}^{(\omega-1)} \mathbf{L} \\ \hat{\mathbf{V}}_i^{(\omega)} &= \mathbf{A} \hat{\mathbf{d}}_{\mathbf{x}}^{(\omega)} + \mathbf{L}_i \\ \hat{\mathbf{y}}^{(\omega)} &= (\mathbf{F}^{(\omega)})^{-1} \hat{\mathbf{f}}^{(\omega)} \end{aligned} \right| \quad (2.30)$$

gdzie:

ω – numer iteracji.

Punktem startowym iteracji są wyniki estymacji uzyskane z wyrównania metodą najmniejszych kwadratów. Podczas wykonywania pierwszej iteracji w macierzy wag \mathbf{P} wykorzystuje się przyjęte *a priori* błędy pomiaru. W kolejnych iteracjach nowe wartości błędów średnich dla jednorodnych grup obserwacji wyznaczane są jako iloczyn estymatora lokalnego współczynnika wariancji i kwadratu średniego błędu pomiaru uzyskanego z iteracji poprzedniej. Jak wcześniej wspomniano, iteracje wykonuje się do momentu spełnienia warunku (2.12).

Obliczone w ostatniej procedurze iteracyjnej wartości estymatora wektora przyrostów $\hat{\mathbf{d}}_{\mathbf{x}}$ przyjmuje się do wyrównania przybliżonych współrzędnych punktów kontrolowanych według zależności:

$$\hat{\mathbf{X}} = \mathbf{X}^0 + \hat{\mathbf{d}}_{\mathbf{x}} \quad (2.31)$$

$\hat{\mathbf{X}}$ – wektor wyrównanych współrzędnych (parametrów),

\mathbf{X}^0 – wektor przybliżonych wartości współrzędnych (parametrów).

Z uwagi na to, że główną problematyką niniejszej pracy jest wyznaczanie przemieszczeń punktów kontrolowanych w lokalnym układzie przestrzennym 3D, w procesie wyznaczania przemieszczeń wykorzystuje się estymację wyników pomiarów uzyskanych z pomiaru pierwotnego (wyjściowego) i aktualnego. Zatem przemieszczenia punktów wyznaczane są jako różnica wyrównanych współrzędnych z dwóch epok pomiarowych:

$$\Delta \hat{\mathbf{X}} = \hat{\mathbf{X}}_{(EA)} - \hat{\mathbf{X}}_{(EP)} \quad (2.32)$$

gdzie:

$\Delta \hat{\mathbf{X}}$ – wektor przemieszczeń, $\hat{\mathbf{X}}_{(EA)} = [\hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z}]_{(EA)}^T$, $\hat{\mathbf{X}}_{(EP)} = [\hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z}]_{(EP)}^T$, (EP) – oznaczenie epoki pierwotnej, (EA) – oznaczenie epoki aktualnej.

Ocena istotności przemieszczeń punktów kontrolowanych

Istotną rolę w ocenie istotności przemieszczeń punktów kontrolowanych pełni ocena dokładności. Wykorzystuje się tutaj macierz kowariancji wyznaczanych przemieszczeń $\mathbf{C}_{\mathbf{d}}$, która dla niniejszych rozważań jest sumą macierzy kowariancji wektora parametrów dla dwóch badanych epok pomiarowych: pierwotnej $\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{X}}_{(EP)}}$ i aktualnej $\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{X}}_{(EA)}}$. Macierz ta ma postać:

$$\mathbf{C}_d = \mathbf{C}_{\hat{\mathbf{X}}_{(EP)}} + \mathbf{C}_{\hat{\mathbf{X}}_{(EA)}} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{d_1} & \mathbf{C}_{d_1 d_2} & \cdots & \mathbf{C}_{d_1 d_W} \\ \mathbf{C}_{d_2 d_1} & \mathbf{C}_{d_2} & \cdots & \mathbf{C}_{d_2 d_W} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{C}_{d_W d_1} & \mathbf{C}_{d_W d_2} & \cdots & \mathbf{C}_{d_W} \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

gdzie: W – ilość punktów kontrolowanych.

Macierz $\mathbf{C}_{d_{\bar{i}}}$ dla poszczególnych punktów kontrolowanych przedstawia się następująco:

$$\mathbf{C}_{d_{\bar{i}}} = \begin{bmatrix} m_{\Delta\hat{X}_{\bar{i}}}^2 & m_{\Delta\hat{X}_{\bar{i}}\Delta\hat{Y}_{\bar{i}}} & m_{\Delta\hat{X}_{\bar{i}}\Delta\hat{Z}_{\bar{i}}} \\ m_{\Delta\hat{Y}_{\bar{i}}\Delta\hat{X}_{\bar{i}}} & m_{\Delta\hat{Y}_{\bar{i}}}^2 & m_{\Delta\hat{Y}_{\bar{i}}\Delta\hat{Z}_{\bar{i}}} \\ m_{\Delta\hat{Z}_{\bar{i}}\Delta\hat{X}_{\bar{i}}} & m_{\Delta\hat{Z}_{\bar{i}}\Delta\hat{Y}_{\bar{i}}} & m_{\Delta\hat{Z}_{\bar{i}}}^2 \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

gdzie:

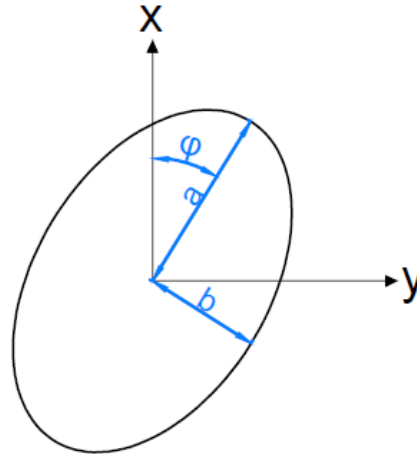
\bar{i} – numer analizowanego punktu kontrolowanego, $\bar{i} = 1, \dots, W$,

$\Delta\hat{X} = \hat{X}_{(EA)} - \hat{X}_{(EP)}$, $\Delta\hat{Y} = \hat{Y}_{(EA)} - \hat{Y}_{(EP)}$, $\Delta\hat{Z} = \hat{Z}_{(EA)} - \hat{Z}_{(EP)}$ – przemieszczenie odpowiednio wzdłuż osi X, Y i Z układu współrzędnych.

W przedstawionych rozważaniach badanie istotności przemieszczeń przeprowadzono osobno dla przemieszczeń poziomych i przemieszczeń pionowych.

Badanie istotności przemieszczeń poziomych opiera się na wykorzystaniu elips ufności przedstawionych m.in. w pracy [10, 22, 23].

Parametry elipsy granicznej przedstawiono na rys. 2.1.



Rys. 2.1. Figura graniczna błędu wyznaczonego przemieszczenia (źródło: opracowanie własne)

W celu wyznaczenia elipsy błędów należy obliczyć jej parametry, takie jak: kąt skręcenia oraz półosie (a, b). Zakładając, że $\lambda_{i,1}$ i $\lambda_{i,2}$ są wartościami własnymi macierzy $\mathbf{C}_{d_{\bar{i}}}$ [22, 23] wyznaczanymi z następujących zależności:

$$\lambda_{i,1} = 0,5 \left(m_{\Delta\hat{X}_{\bar{i}}}^2 - m_{\Delta\hat{Y}_{\bar{i}}}^2 - \sqrt{\Delta} \right) \quad (2.35)$$

$$\lambda_{i,2} = 0,5 \left(m_{\Delta\hat{X}_{\bar{i}}}^2 - m_{\Delta\hat{Y}_{\bar{i}}}^2 + \sqrt{\Delta} \right) \quad (2.36)$$

gdzie:

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{\left(m_{\Delta\hat{X}_{\bar{i}}}^2 - m_{\Delta\hat{Y}_{\bar{i}}}^2\right)^2 + 4m_{\Delta\hat{X}_{\bar{i}}\Delta\hat{Y}_{\bar{i}}}^2}$$

poszczególne parametry elips ufności przyjmują postać następującą:

$$a_{\bar{i}} = m_0 \sqrt{2\lambda_{\bar{i},1} F_{\gamma}} \quad (2.37)$$

$$b_{\bar{i}} = m_0 \sqrt{2\lambda_{\bar{i},2} F_{\gamma}} \quad (2.38)$$

$$\vartheta_{\bar{i}} = \frac{1}{2} \arctg \frac{2m_{\Delta\hat{X}_{\bar{i}}\Delta\hat{Y}_{\bar{i}}}}{m_{\Delta\hat{X}_{\bar{i}}}^2 - m_{\Delta\hat{Y}_{\bar{i}}}^2} \quad (2.39)$$

gdzie:

$$m_0^2 = \frac{s_{EP} m_{0(EP)}^2 + s_{EA} m_{0(EA)}^2}{s} = \frac{(\hat{\mathbf{V}}_{EP}^T \mathbf{P}_{EP} \hat{\mathbf{V}}_{EP}) + (\hat{\mathbf{V}}_{EA}^T \mathbf{P}_{EA} \hat{\mathbf{V}}_{EA})}{s}$$

$$s = s_{EP} + s_{EA}$$

s_{EP} – liczba stopni swobody w pierwotnej epoce pomiarowej,

s_{EA} – liczba stopni swobody w aktualnej epoce pomiarowej,

\mathbf{P}_{EP} – macierz wag dla pomiaru w pierwotnej epoce pomiarowej,

\mathbf{P}_{EA} – macierz wag dla pomiaru w aktualnej epoce pomiarowej,

F_{γ} – fraktyl rozkładu F -Snedecora dla określonej wartości prawdopodobieństwa γ i stopni swobody s ,

$a_{\bar{i}}, b_{\bar{i}}$ – półosie elipsy ufności,

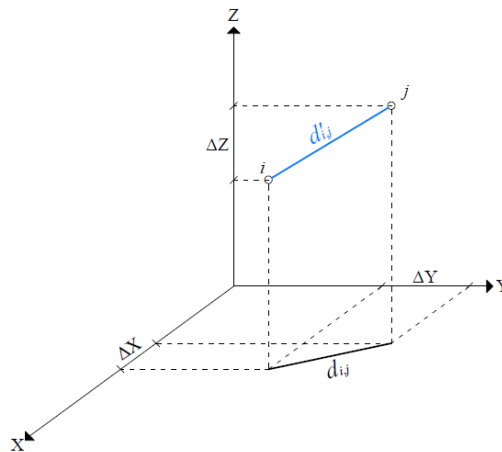
$\vartheta_{\bar{i}}$ – kąt skręcenia elipsy ufności

Ocena istotności przemieszczenia poziomego polega na sprawdzeniu, czy wektor przemieszczenia poziomego wykracza poza figurę graniczną błędu wyznaczenia tego wektora (elipsę graniczną). Jeżeli wektor przemieszczenia zawiera się w elipsie przemieszczenie uznaje się za nieistotne (np. przyjmując $\gamma = 95\%$ oznacza to, że z prawdopodobieństwem 95% różnice wyrównanych współrzędnych w dwu epokach są wynikiem błędów przypadkowych pomiarów), jeżeli wykracza poza elipsę – można mówić o przemieszczeniu istotnym.

Ocena istotności przemieszczeń pionowych wykonywana jest w oparciu o zależność:

$|\Delta\hat{Z}_{\bar{i}}| \leq km_{\Delta\hat{Z}_{\bar{i}}}$. Przemieszczenie pionowe uznaje się za nieistotne, jeżeli wartość bezwzględna jego wyznaczonej wielkości (składowa pionowa wektora przemieszczenia) nie przekracza k -krotnej wielkości błędu wyznaczenia tej składowej. W dalszych rozważaniach i obliczeniach przyjęto współczynnik $k = 2$, co wynikało z przyjętego poziomu prawdopodobieństwa.

Do praktycznych analiz wykorzystano dane pozyskane z systemu monitoringu przemieszczeń zadaszenia sopockiej Opery Leśnej. W ramach systemu obserwacjom podlegają odległości skośne, kąty poziome oraz kąty pionowe. Poniżej przedstawione zostaną równania obserwacyjne dla wymienionych obserwacji, a także ich liniowe równania poprawek.



Rys. 2.2. Odległość przestrzenna (źródło: opracowanie własne)

Odległością przestrzenną $d'_{i,j}$ między dwoma punktami i, j (rys. 2.2.) nazywamy długość wektora o początku w punkcie i oraz końcu w punkcie j , którą można zapisać w następującej postaci:

$$\vec{ij} = [X_j - X_i, Y_j - Y_i, Z_j - Z_i] \tag{2.40}$$

Równanie obserwacyjne dla odległości przestrzennej przyjmuje zatem postać:

$$d'_{i,j} = \sqrt{(X_j - X_i)^2 + (Y_j - Y_i)^2 + (Z_j - Z_i)^2} \tag{2.41}$$

stąd liniowe równanie poprawki można wyrazić wzorem:

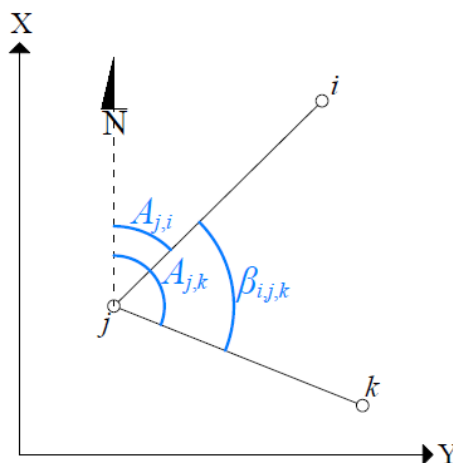
$$\hat{V}_{d'_{i,j}} = \frac{X_j - X_i}{d'_{i,j}} (\hat{dX}_j - \hat{dX}_i) + \frac{Y_j - Y_i}{d'_{i,j}} (\hat{dY}_j - \hat{dY}_i) + \frac{Z_j - Z_i}{d'_{i,j}} (\hat{dZ}_j - \hat{dZ}_i) + d'_{i,j} - d'_{i,j}{}^{pom} \tag{2.42}$$

gdzie:

$\hat{dX}, \hat{dY}, \hat{dZ}$ – estymatory wektora przyrostów do współrzędnych przybliżonych,

$d'_{i,j}$ – odległość przestrzenna obliczona ze współrzędnych przybliżonych,

$d'_{i,j}{}^{pom}$ – obserwowana wartość odległości przestrzennej.



Rys. 2.3. Kąt poziomy (źródło: opracowanie własne)

Kąt poziomy $\beta_{i,j,k}$ (rys. 2.3) jest różnicą azymutów $A_{j,k}$ oraz $A_{j,i}$. Zatem równanie obserwacyjne możemy zapisać następująco:

$$\beta_{i,j,k} = \arctg \frac{Y_k - Y_j}{X_k - X_j} - \arctg \frac{Y_i - Y_j}{X_i - X_j} \quad (2.43)$$

z czego wynika liniowe równanie poprawki o postaci:

$$\begin{aligned} \hat{V}_{\beta_{i,j,k}} = & \frac{(Y_i - Y_j) \cdot \rho^{cc}}{d_{j,i}^2} \hat{dX}_i - \frac{(X_i - X_j) \cdot \rho^{cc}}{d_{j,i}^2} \hat{dY}_i - \frac{(Y_k - Y_j) \cdot \rho^{cc}}{d_{j,k}^2} \hat{dX}_k + \\ & + \frac{(X_k - X_j) \cdot \rho^{cc}}{d_{j,k}^2} \hat{dY}_k + \left(\frac{Y_i - Y_j}{d_{j,i}^2} - \frac{Y_k - Y_j}{d_{j,k}^2} \right) \cdot \rho^{cc} \hat{dX}_j + \\ & + \left(\frac{X_i - X_j}{d_{j,i}^2} - \frac{X_k - X_j}{d_{j,k}^2} \right) \cdot \rho^{cc} \hat{dY}_j + \beta_{i,j,k} - \beta_{i,j,k}^{pom} \end{aligned} \quad (2.44)$$

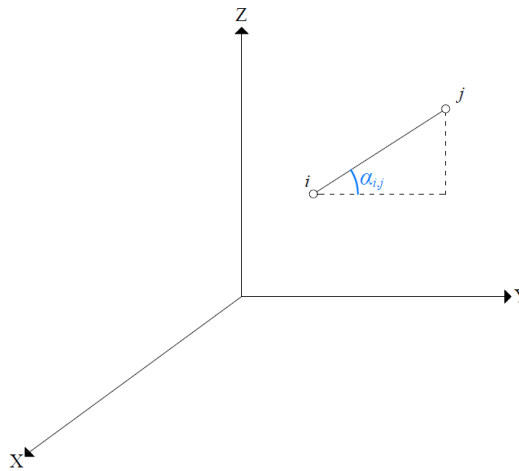
gdzie:

$\beta_{i,j,k}$ – kąt poziomy obliczony ze współrzędnych przybliżonych,

$\beta_{i,j,k}^{pom}$ – obserwowana wartość kąta poziomego,

d – odległość pozioma obliczona ze współrzędnych przybliżonych zgodnie ze wzorem:

$$d_{i,j} = \sqrt{(X_i - X_j)^2 + (Y_i - Y_j)^2} \quad (2.45)$$



Rys. 2.4. Kąt pionowy (źródło: opracowanie własne)

Kątem pionowym $\alpha_{i,j}$ (rys. 2.4.) nazywamy kąt między linią odniesienia wyznaczoną przez płaszczyznę horyzontu instrumentu, którym realizowany jest pomiar geodezyjny i kierunkiem na punkt kontrolowany. Równanie obserwacyjne przedstawia zależność:

$$\alpha_{i,j} = \arctg \frac{Z_j - Z_i}{\sqrt{(X_j - X_i)^2 + (Y_j - Y_i)^2}} \quad (2.46)$$

stąd liniowe równanie poprawki dla obserwacji kąta pionowego przyjmie postać:

$$\hat{V}_{\alpha_{i,j}} = -\frac{(Z_j - Z_i)(X_j - X_i)\rho^{cc}}{d'_{i,j}{}^2 d_{i,j}} (\hat{dX}_j - \hat{dX}_i) - \frac{(Z_j - Z_i)(Y_j - Y_i)\rho^{cc}}{d'_{i,j}{}^2 d_{i,j}} (\hat{dY}_j - \hat{dY}_i) + \frac{d_{i,j}\rho^{cc}}{d'_{i,j}{}^2} (\hat{dZ}_j - \hat{dZ}_i) + \alpha_{i,j} - \alpha_{i,j}^{pom} \quad (2.47)$$

gdzie:

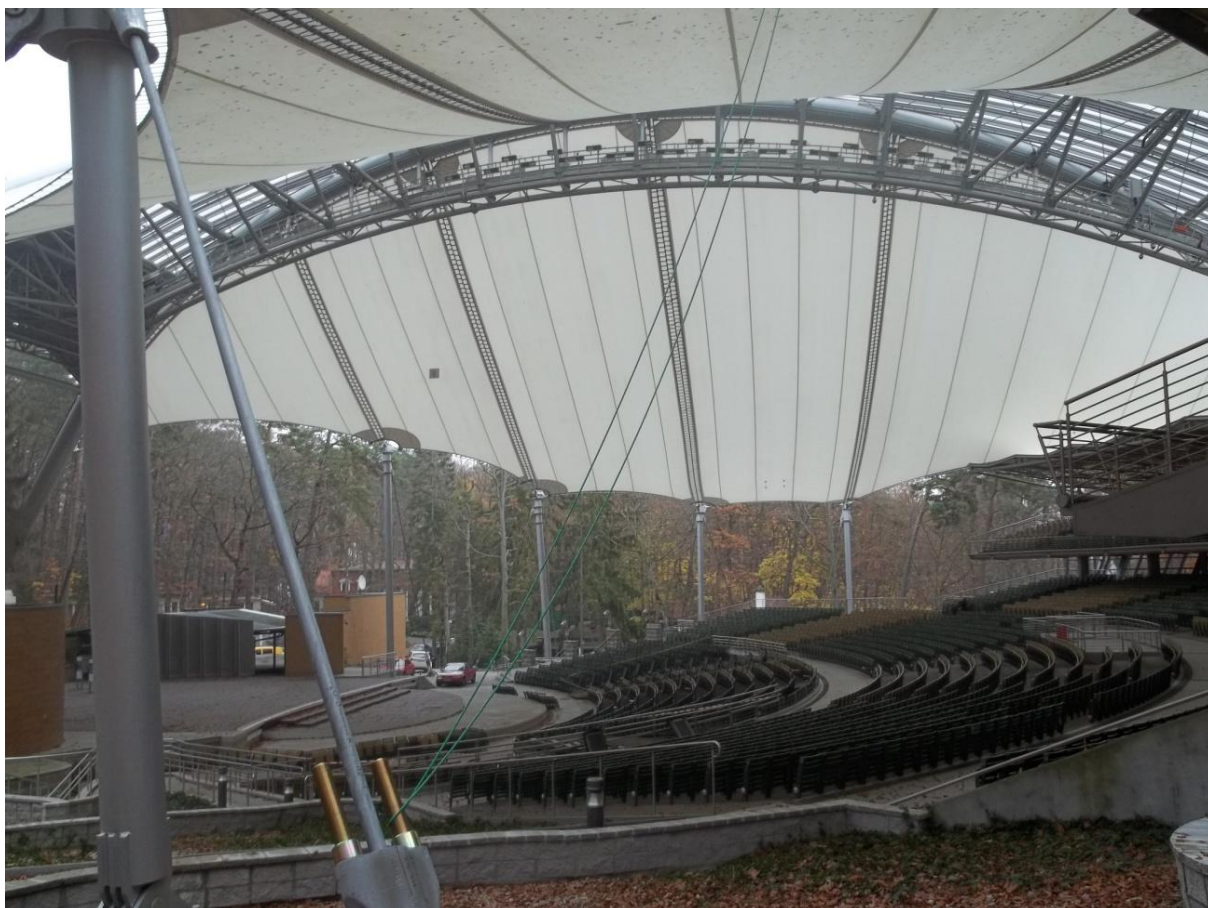
$\alpha_{i,j}$ – kąt pionowy obliczony ze współrzędnych przybliżonych,

$\alpha_{i,j}^{pom}$ – obserwowana wartość kąta pionowego.

3. Wyznaczenie przemieszczeń wybranych punktów kontrolowanych zadaszania Opery Leśnej w Sopocie oraz ocena ich istotności

3.1. Konstrukcja zadaszania Opery Leśnej w Sopocie

Obecny kształt zadaszania Opery Leśnej w Sopocie jest wynikiem gruntownej przebudowy obiektu w okresie od września 2009 do czerwca 2012. Razem z dachem zmieniono również konstrukcję widowni oraz pomieszczeń dla artystów. Koncepcja projektantów dachu to kształt liścia, który ma przypominać o charakterze otoczenia Opery Leśnej, a jednocześnie ma być obiektem nowatorskim i o nowoczesnej formie (rys. 3.1.).



Rys. 3.1. Fragment zadaszania Opery Leśnej w Sopocie (źródło: własne)

Nowatorstwo dachu objawia się głównie materiałem przekrycia. Składa się ono z dwóch połaci z tkaniny technicznej rozpiętych na dwóch stalowych łukach i stalowych linach, które opierają się na słupach. Z uwagi na charakterystyczne ukształtowanie kotliny, w której amfiteatr się znajduje, łuki mają różną długość. Długość dłuższego łuku wynosi 102,96 m, natomiast krótszego łuku 93,20 m. Średnica rur stalowych gorącowalcowanych, z których łuki nośne zostały wykonane, wynosi 1300 mm, a grubość ich ścianki to 70 mm. Łuki, nachylone wzajemnie pod kątem 51° i spięte kratownicą, zostały zakotwione w blokach fundamentowych o rozstawie osiowym 94×48 m. Łuki w najwyższym punkcie konstrukcji zbliżają się do siebie na odległość 6 m. Przytwierdzenie łuku nośnego do bloku fundamentowego przedstawiono na rys. 3.2.



Rys. 3.2. Przytwierdzenie łuku nośnego do bloku fundamentowego (źródło: własne)

Tkanina wykonana jest na bazie włókna szklanego i pokryta jest teflonem, jej grubość nie przekracza 1 mm. Rozpięta jest na stalowych linach nośnych i krawędziowych pomiędzy łukami nośnymi i słupami konstrukcji. Każdy słup posiada fundament i dwa odciały, które również są zakotwione w blokach fundamentowych (rys. 3.1.).

Maksymalna rozpiętość dachu to 104 m, a jego długość: 85 m. Każda z części przekrycia to powierzchnia około 1800 m². Najwyższy punkt konstrukcji wznosi się na wysokość 27,935 m powyżej poziomu porównawczego. Zarówno przekrycie, jak i elementy konstrukcyjne zadaszenia to materiały najwyższej jakości. Konstrukcja nośna wykonana została z wysokiej jakości stali z Zagłębia Ruhry, łuki nośne pochodzą z angielskich hut, natomiast tkanina jest dziełem francuskiej korporacji Saint-Gobain (tego samego typu przekrycie zastosowano w zadaszeniu stadionu w Seulu) [4, 15].



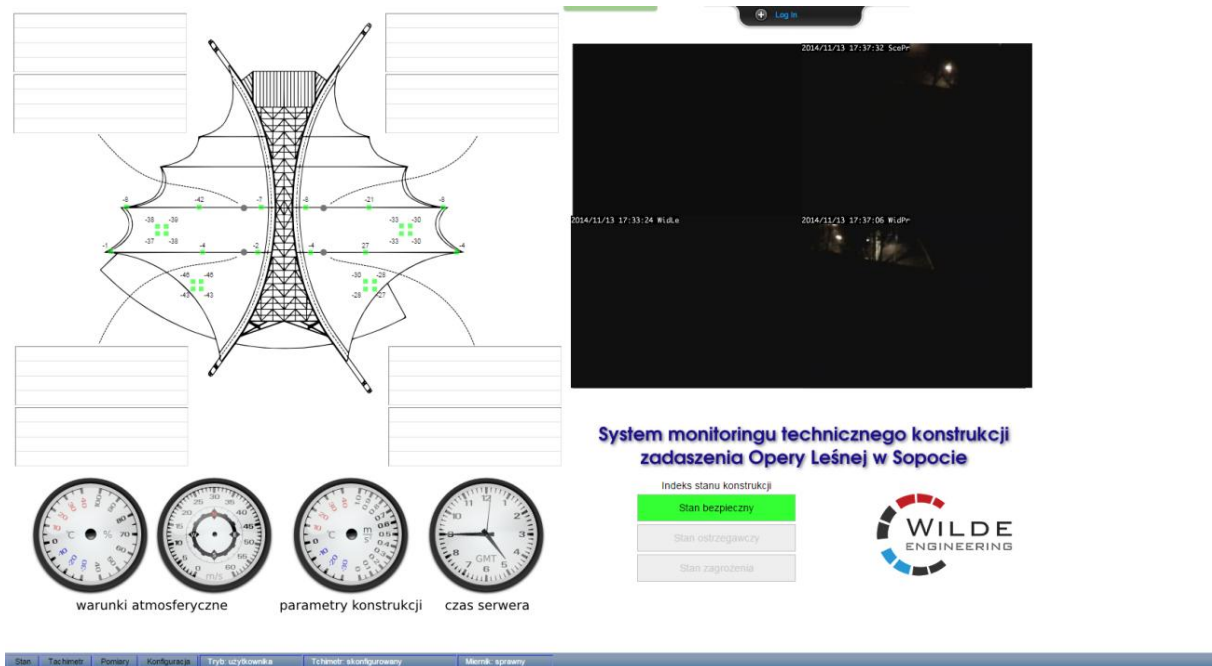
Rys. 3.3. Łuki nośne konstrukcji zadaszania Opery Leśnej w Sopocie (źródło: własne)

3.2. System monitoringu konstrukcji (system monitoringu przemieszczeń)

W związku z nowatorskim rozwiązaniem zadaszania obiektu, w celu podniesienia bezpieczeństwa jego użytkowania, zastosowano monitoring przemieszczeń. Podstawowym celem zastosowania takiego systemu jest monitorowanie wszelkich zmian elementów konstrukcyjnych, które mogłyby spowodować utratę stabilności obiektu i zagrozić bezpieczeństwu osób przebywających na jego terenie. Kolejną funkcją systemu monitoringu konstrukcji (nazywanego dalej SMK) jest wspieranie procesu utrzymania obiektu, np. poprzez wysyłanie informacji o konieczności odśnieżania dachu.

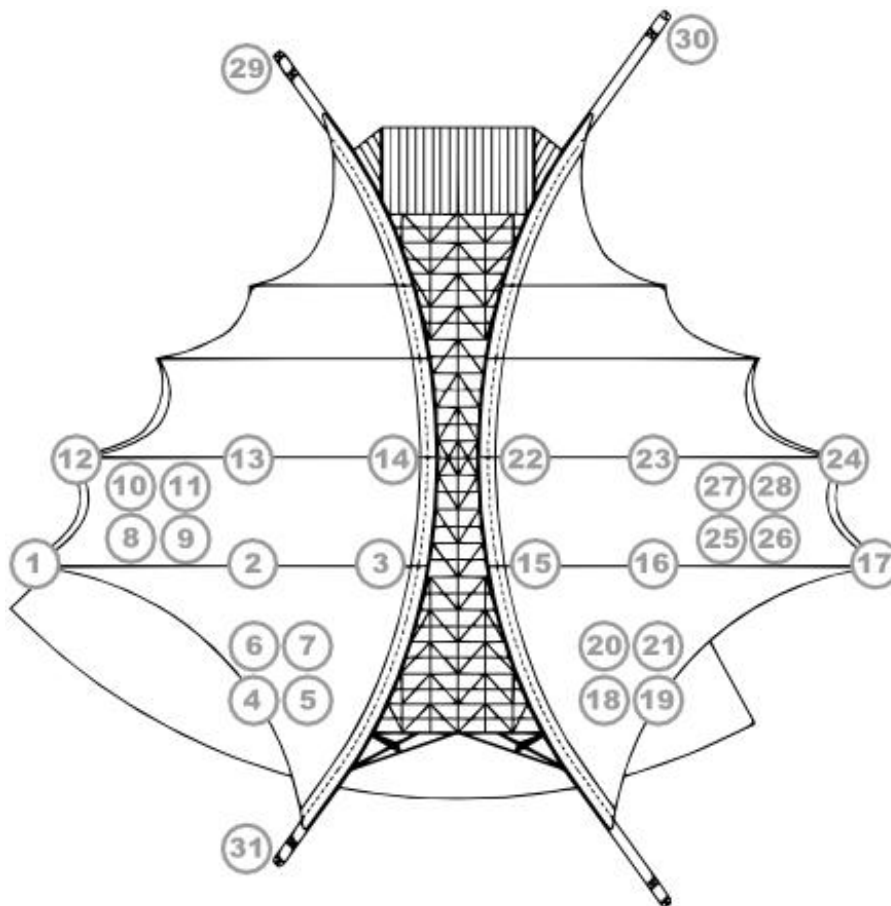
SMK [6, 15,16] składa się z czterech modułów: modułu pomiarowego, modułu analiz, modułu eksperckiego i modułu powiadamiania. Jednostka centralna systemu umożliwia zdalne sterowanie czujnikami i urządzeniami wchodzącymi w skład SMK z dowolnego miejsca. Dodatkowo w module powiadamiania na stronie internetowej wyświetlane są informacje o stanie konstrukcji, wskazaniach sensorów, wyniki pomiarów urządzeń, podgląd z kamer monitoringu. Wyświetlany jest również indeks stanu konstrukcji, pozwalający

ocenić, czy obiekt nie stwarza zagrożenia. Moduł powiadamiania w przypadku stanu awarii, czy zagrożenia powiadamia osoby odpowiedzialne za bezpieczeństwo obiektu za pomocą różnych źródeł komunikacji (wiadomości SMS, e-mail itp.). Interfejs modułu powiadamiania przedstawiono na rys. 3.4.



Rys. 3.4. Interfejs modułu powiadamiania system monitoring konstrukcji dachu Opery Leśnej w Sopocie (źródło: [25])

Moduł pomiarowy SMK składa się z szeregu czujników i urządzeń umożliwiających określenie stanu konstrukcji. W różnych miejscach budowli zainstalowano czujniki przyspieszeń, temperatury, kierunku i prędkości wiatru, higrometry, kamery monitoringu oraz elementy geodezyjnego systemu monitoringu przemieszczeń, który jest najbardziej istotny z punktu widzenia tematyki pracy. Wszelkie dane rejestrowane przez SMK przesyłane są do systemu akwizycji danych.



Rys. 3.5. Rozmieszczenie punktów referencyjnych oraz punktów kontrolowanych zadania Opery Leśnej (źródło: [25])

Geodezyjny system monitoringu przemieszczeń składa się z tachimetru Leica TS 15I, 28 punktów kontrolowanych oraz 3 punktów referencyjnych sygnalizowanych pryzmatami (rys. 3.5.). Tachimetr Leica TS 15I jest automatycznym, zmotoryzowanym tachimetrem umożliwiającym zdalny pomiar z bardzo wysoką dokładnością. Instrument wyposażony jest w system PowerSearch, który umożliwia odnalezienie pryzmatów bez względu na ich położenie względem niego, jeśli znajdują się w jego polu widzenia. Wysyła rozbieżną wiązkę lasera, która po odbiciu od pryzmatu wraca do tachimetru, pozwalając zlokalizować pryzmat. Precyzyjne celowanie do środka pryzmatu realizowane jest przez system ATR, który wysyła współosiową z osią celową wiązkę promieniowania laserowego. Odbita od pryzmatu wiązka, po powrocie do instrumentu, analizowana jest przez dedykowaną matrycę światłoczułą, co pozwala na obliczenie przesunięcia kąтового pryzmatu względem osi celowej i dokładne wycelowanie w środek pryzmatu. Dodatkowo tachimetr Leica TS 15I posiada wbudowaną kamerę o rozdzielczości wykonywanych fotografii wynoszącej 5 milionów pikseli. Umożliwia ona zdalne (za pomocą serwisu internetowego SMK) nacelowanie na wybrane punkty kontrolowane. Podgląd pola działania tachimetru elektronicznego jest szczególnie przydatny do identyfikacji przeszkód uniemożliwiających wykonanie pomiaru, na przykład zainstalowanych na konstrukcji elementów scenografii. W trakcie każdej epoki pomiarowej rejestrowane są odległości przestrzenne (d'), kierunki poziome (H_z) i kąty zenitalne (z) między stanowiskiem tachimetru i każdym z punktów kontrolowanych i odniesienia. W tabeli 3.1. przedstawiono najważniejsze parametry techniczne tachimetru TS 15I.

Tabela 3.1. Parametry techniczne tachimetru Leica TS 15I (źródło: [24])

Dokładność pomiaru Hz, V	1''
Zasięg na mini pryzmat (Leica GMP104) w trybie ATR	500 m
Zasięg na folię odblaskową (60 x 60 mm)	250 m
Dokładność pomiaru odległości w trybie standardowym	1 mm+1,5 ppm
Powiększenie lunety	30x
Matryca kamery	CMOS (5 mln pikseli)
Dokładność wyznaczania pozycji pryzmatu w trybie ATR	1 mm

Tachimetr zlokalizowany jest nad widownią, na pomoście technicznym (kratownicy łączącej łuki nośne; rys. 3.6.), w osi konstrukcji. Ze względu na jego usytuowanie nie można założyć stałości położenia tachimetru. Przed wpływem czynników atmosferycznych tachimetr chroni szklana obudowa, skonstruowana w sposób zapewniający wizurę do wszystkich punktów kontrolowanych i referencyjnych [16].

Punkty kontrolowane sygnalizowane są przytwierdzonymi do różnych części konstrukcji mini pryzmatami Leica GMP104. Zaletą użytych sygnałów jest ich sztywność i stosunkowo małe odchylenie wiązki padającej lasera tachimetru (6''). Rozmieszczenie pryzmatów przedstawione zostało na rys. 3.5.

Punkty odniesienia (rys. 3.7.) zlokalizowane są na blokach fundamentowych, w których zakotwione są łuki nośne pokrycia dachu Opery Leśnej. Zasygnalizowane są pryzmatami tego samego typu, co punkty kontrolowane (rys. 3.8).



Rys. 3.6. Stanowisko tachimetru (źródło: własne)



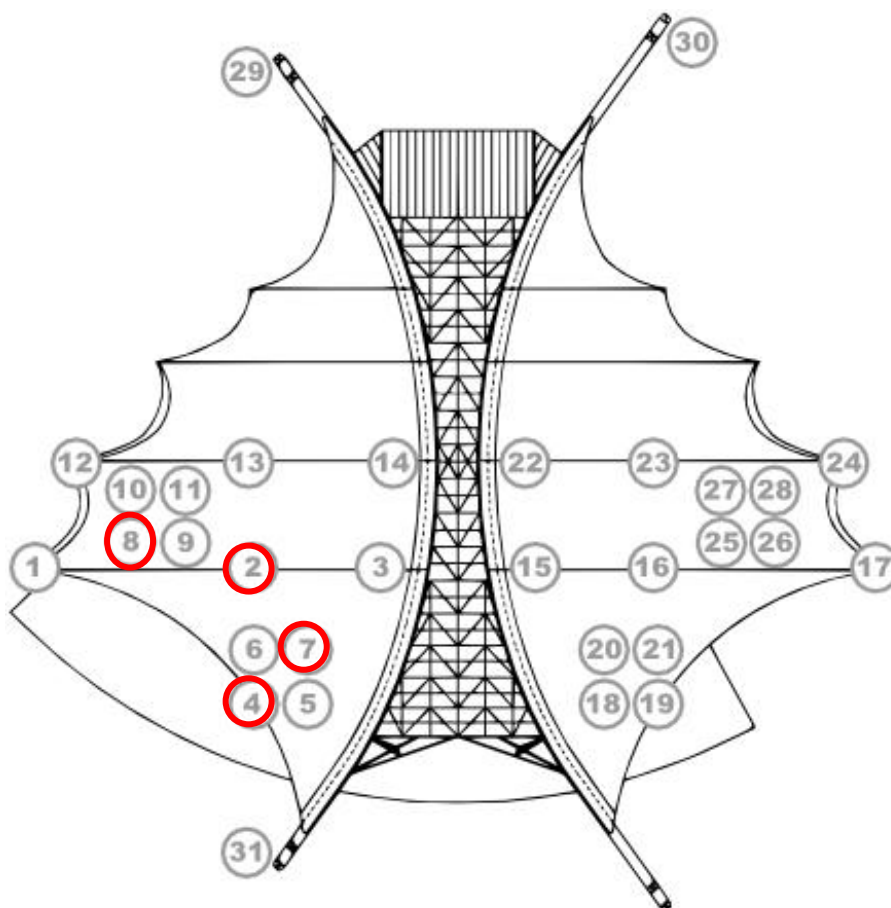
Rys. 3.7. Punkt referencyjny SMK (źródło: własne)



Rys. 3.8. Punkt kontrolowany zlokalizowany na membranie zadaszzenia Operry Leśnej (źródło: własne)

3.3. Wyznaczenie przemieszczeń poziomych i pionowych wybranych punktów kontrolowanych (z oceną ich istotności) z wykorzystaniem globalnego współczynnika wariancji

W celu wykonania praktycznych analiz przemieszczeń, z grupy 28 punktów kontrolowanych wybrano 4, które charakteryzują się zróżnicowanym rozmieszczeniem na zadaszaniu Opery Leśnej. Wybrane punkty oznaczone są na rys. 3.9. numerami 2, 4, 7 oraz 12. Punkt 2 zlokalizowany jest na linii nośnej, punkty 4 i 7 na tkaninie technicznej, natomiast punkt 12 znajduje się na linii nośnej, w pobliżu jej przytwierdzenia do słupa.



Rys. 3.9. Wybór punktów kontrolowanych przyjętych do analizy (źródło: opracowanie własne na podstawie [25])

Danymi niezbędnymi do przeprowadzenia obliczeń są współrzędne punktów referencyjnych, które zestawiono w tabeli 3.2. (punkty nr 29, 30, 31; zakładamy ich bezbłądność – problem stałości punktów odniesienia nie jest treścią niniejszej pracy) oraz spostrzeżenia dla każdego punktu objętego analizą w dwu epokach pomiarowych. Wykorzystywanymi w analizach obserwacjami są odległości przestrzenne, kierunki poziome i kąty zenitalne (tego typu dane są rejestrowane przez tachimetr SMK Opery Leśnej).

Tabela 3.2. Współrzędne punktów referencyjnych (źródło: opracowanie własne)

	Punkt nr 29	Punkt nr 30	Punkt nr 31
X [m]	79,6878	84,2873	-17,2773
Y [m]	-18,5198	22,2155	-18,8143
Z [m]	-5,8898	-9,9693	-6,0012

Jako, że do wyznaczenia przemieszczeń punktów kontrolowanych konstrukcji dachu Opery Leśnej w Sopocie wykorzystano model dwuepokowy, wyrównaniu podlegają obserwacje pochodzące z pomiaru w dwóch epokach pomiarowych. Wyrównanie przeprowadzono zgodnie z algorytmem przedstawionym w rozdziale 2. Pierwszy pomiar będący pomiarem odniesienia pochodzi z 16 stycznia 2014 roku (nazywany dalej *0. epoką pomiarową*), pomiar kolejny – 30 czerwca 2014 roku (nazywany dalej *1. epoką pomiarową* lub *pomiarem aktualnym*).

Dla przeprowadzenia wyrównania niezbędne jest określenie równań poprawek dla każdej z obserwacji. W tabelach 3.3 – 3.5 zestawiono równania poprawek dla odległości skośnych, kątów poziomych oraz kątów pionowych rozpatrywanej sieci.

Tabela 3.3. Równania poprawek dla odległości przestrzennych d' (źródło: opracowanie własne)

$d'_{st,31}$	$\hat{V}_{d'_{st,31}} = \frac{X_{st} - X_{31}}{(d'_{st,31})^2} \hat{dX}_{st} + \frac{Y_{st} - Y_{31}}{(d'_{st,31})^2} \hat{dY}_{st} + \frac{Z_{st} - Z_{31}}{(d'_{st,31})^2} \hat{dZ}_{st} + d'_{st,31} - d'_{st,31}^{pom}$
$d'_{st,2}$	$\hat{V}_{d'_{st,2}} = \frac{X_{st} - X_2}{(d'_{st,2})^2} \hat{dX}_{st} + \frac{Y_{st} - Y_2}{(d'_{st,2})^2} \hat{dY}_{st} + \frac{Z_{st} - Z_2}{(d'_{st,2})^2} \hat{dZ}_{st} - \frac{X_{st} - X_2}{(d'_{st,2})^2} \hat{dX}_2 +$ $- \frac{Y_{st} - Y_2}{(d'_{st,2})^2} \hat{dY}_2 - \frac{Z_{st} - Z_2}{(d'_{st,2})^2} \hat{dZ}_2 + d'_{st,2} - d'_{st,2}^{pom}$
$d'_{st,4}$	$\hat{V}_{d'_{st,4}} = \frac{X_{st} - X_4}{(d'_{st,4})^2} \hat{dX}_{st} + \frac{Y_{st} - Y_4}{(d'_{st,4})^2} \hat{dY}_{st} + \frac{Z_{st} - Z_4}{(d'_{st,4})^2} \hat{dZ}_{st} - \frac{X_{st} - X_4}{(d'_{st,4})^2} \hat{dX}_4 +$ $- \frac{Y_{st} - Y_4}{(d'_{st,4})^2} \hat{dY}_4 - \frac{Z_{st} - Z_4}{(d'_{st,4})^2} \hat{dZ}_4 + d'_{st,4} - d'_{st,4}^{pom}$
$d'_{st,7}$	$\hat{V}_{d'_{st,7}} = \frac{X_{st} - X_7}{(d'_{st,7})^2} \hat{dX}_{st} + \frac{Y_{st} - Y_7}{(d'_{st,7})^2} \hat{dY}_{st} + \frac{Z_{st} - Z_7}{(d'_{st,7})^2} \hat{dZ}_{st} - \frac{X_{st} - X_7}{(d'_{st,7})^2} \hat{dX}_7 +$ $- \frac{Y_{st} - Y_7}{(d'_{st,7})^2} \hat{dY}_7 - \frac{Z_{st} - Z_7}{(d'_{st,7})^2} \hat{dZ}_7 + d'_{st,7} - d'_{st,7}^{pom}$
$d'_{st,12}$	$\hat{V}_{d'_{st,12}} = \frac{X_{st} - X_{12}}{(d'_{st,12})^2} \hat{dX}_{st} + \frac{Y_{st} - Y_{12}}{(d'_{st,12})^2} \hat{dY}_{st} + \frac{Z_{st} - Z_{12}}{(d'_{st,12})^2} \hat{dZ}_{st} - \frac{X_{st} - X_{12}}{(d'_{st,12})^2} \hat{dX}_{12} +$ $- \frac{Y_{st} - Y_{12}}{(d'_{st,12})^2} \hat{dY}_{12} - \frac{Z_{st} - Z_{12}}{(d'_{st,12})^2} \hat{dZ}_{12} + d'_{st,12} - d'_{st,12}^{pom}$
$d'_{st,29}$	$\hat{V}_{d'_{st,29}} = \frac{X_{st} - X_{29}}{(d'_{st,29})^2} \hat{dX}_{st} + \frac{Y_{st} - Y_{29}}{(d'_{st,29})^2} \hat{dY}_{st} + \frac{Z_{st} - Z_{29}}{(d'_{st,29})^2} \hat{dZ}_{st} + d'_{st,29} - d'_{st,29}^{pom}$

$d'_{st,30}$	$\hat{V}_{d'_{st,29}} = -\frac{X_{30} - X_{st}}{(d'_{st,30})^2} \hat{dX}_{st} - \frac{Y_{30} - Y_{st}}{(d'_{st,30})^2} \hat{dY}_{st} - \frac{Z_{30} - Z_{st}}{(d'_{st,30})^2} \hat{dZ}_{st} + d'_{st,30} - d'_{st,30}^{pom}$
--------------	--

Tabela 3.4. Równania poprawek dla kątów poziomych β (źródło: opracowanie własne)

$\beta_{31,st,2}$	$\hat{V}_{\beta_{31,st,2}} = -\frac{(Y_2 - Y_{st}) \cdot \rho^{cc}}{d_{st,2}^2} \hat{dX}_2 + \frac{(X_2 - X_{st}) \cdot \rho^{cc}}{d_{st,2}^2} \hat{dY}_2 - \left(\frac{Y_{31} - Y_{st}}{d_{st,31}^2} - \frac{Y_2 - Y_{st}}{d_{st,2}^2} \right) \cdot \rho^{cc} \hat{dX}_{st} +$ $+ \left(\frac{X_{31} - X_{st}}{d_{st,31}^2} - \frac{X_2 - X_{st}}{d_{st,2}^2} \right) \cdot \rho^{cc} \hat{dY}_{st} + \beta_{31,st,2} - \beta_{31,st,2}^{pom}$
$\beta_{31,st,4}$	$\hat{V}_{\beta_{31,st,4}} = -\frac{(Y_4 - Y_{st}) \cdot \rho^{cc}}{d_{st,4}^2} \hat{dX}_4 + \frac{(X_4 - X_{st}) \cdot \rho^{cc}}{d_{st,4}^2} \hat{dY}_4 - \left(\frac{Y_{31} - Y_{st}}{d_{st,31}^2} - \frac{Y_4 - Y_{st}}{d_{st,4}^2} \right) \cdot \rho^{cc} \hat{dX}_{st} +$ $+ \left(\frac{X_{31} - X_{st}}{d_{st,31}^2} - \frac{X_4 - X_{st}}{d_{st,4}^2} \right) \cdot \rho^{cc} \hat{dY}_{st} + \beta_{31,st,4} - \beta_{31,st,4}^{pom}$
$\beta_{31,st,7}$	$\hat{V}_{\beta_{31,st,7}} = -\frac{(Y_7 - Y_{st}) \cdot \rho^{cc}}{d_{st,7}^2} \hat{dX}_7 + \frac{(X_7 - X_{st}) \cdot \rho^{cc}}{d_{st,7}^2} \hat{dY}_7 - \left(\frac{Y_{31} - Y_{st}}{d_{st,31}^2} - \frac{Y_7 - Y_{st}}{d_{st,7}^2} \right) \cdot \rho^{cc} \hat{dX}_{st} +$ $+ \left(\frac{X_{31} - X_{st}}{d_{st,31}^2} - \frac{X_7 - X_{st}}{d_{st,7}^2} \right) \cdot \rho^{cc} \hat{dY}_{st} + \beta_{31,st,7} - \beta_{31,st,7}^{pom}$
$\beta_{31,st,12}$	$\hat{V}_{\beta_{31,st,12}} = -\frac{(Y_{12} - Y_{st}) \cdot \rho^{cc}}{d_{st,12}^2} \hat{dX}_{12} + \frac{(X_{12} - X_{st}) \cdot \rho^{cc}}{d_{st,12}^2} \hat{dY}_{12} +$ $- \left(\frac{Y_{31} - Y_{st}}{d_{st,31}^2} - \frac{Y_{12} - Y_{st}}{d_{st,12}^2} \right) \cdot \rho^{cc} \hat{dX}_{st} + \left(\frac{X_{31} - X_{st}}{d_{st,31}^2} - \frac{X_{12} - X_{st}}{d_{st,12}^2} \right) \cdot \rho^{cc} \hat{dY}_{st} +$ $+ \beta_{31,st,12} - \beta_{31,st,12}^{pom}$
$\beta_{2,st,29}$	$\hat{V}_{\beta_{2,st,29}} = -\frac{(Y_2 - Y_{st}) \cdot \rho^{cc}}{d_{st,2}^2} \hat{dX}_2 + \frac{(X_2 - X_{st}) \cdot \rho^{cc}}{d_{st,2}^2} \hat{dY}_2 - \left(\frac{Y_2 - Y_{st}}{d_{st,2}^2} - \frac{Y_{29} - Y_{st}}{d_{st,29}^2} \right) \cdot \rho^{cc} \hat{dX}_{st} +$ $+ \left(\frac{X_2 - X_{st}}{d_{st,2}^2} - \frac{X_{29} - X_{st}}{d_{st,29}^2} \right) \cdot \rho^{cc} \hat{dY}_{st} + \beta_{2,st,29} - \beta_{2,st,29}^{pom}$

$\beta_{4,st,29}$	$\hat{V}_{\beta_{4,st,29}} = -\frac{(Y_4 - Y_{st}) \cdot \rho^{cc}}{d_{st,4}^2} \hat{d}X_4 + \frac{(X_4 - X_{st}) \cdot \rho^{cc}}{d_{st,4}^2} \hat{d}Y_4 - \left(\frac{Y_4 - Y_{st}}{d_{st,4}^2} - \frac{Y_{29} - Y_{st}}{d_{st,29}^2} \right) \cdot \rho^{cc} \hat{d}X_{st} +$ $+ \left(\frac{X_4 - X_{st}}{d_{st,4}^2} - \frac{X_{29} - X_{st}}{d_{st,29}^2} \right) \cdot \rho^{cc} \hat{d}Y_{st} + \beta_{4,st,29} - \beta_{4,st,29}^{pom}$
-------------------	--

Tabela 3.5. Równania poprawek dla kątów pionowych α (źródło: opracowanie własne)

$\alpha_{st,31}$	$\hat{V}_{\alpha_{st,31}} = \frac{(Z_{31} - Z_{st})(X_{31} - X_{st}) \rho^{cc}}{d'_{st,31}^2 d_{st,31}} \hat{d}X_{st} + \frac{(Z_{31} - Z_{st})(Y_{31} - Y_{st}) \rho^{cc}}{d'_{st,31}^2 d_{st,31}} \hat{d}Y_{st} - \frac{d_{st,31} \rho^{cc}}{d'_{st,31}^2} \hat{d}Z_{st} +$ $+ \alpha_{st,31} - \alpha_{st,31}^{pom}$
$\alpha_{st,2}$	$\hat{V}_{\alpha_{st,2}} = \frac{(Z_2 - Z_{st})(X_2 - X_{st}) \rho^{cc}}{d'_{st,2}^2 d_{st,2}} \hat{d}X_{st} + \frac{(Z_2 - Z_{st})(Y_2 - Y_{st}) \rho^{cc}}{d'_{st,2}^2 d_{st,2}} \hat{d}Y_{st} - \frac{d_{st,2} \rho^{cc}}{d'_{st,2}^2} \hat{d}Z_{st} +$ $- \frac{(Z_2 - Z_{st})(X_2 - X_{st}) \rho^{cc}}{d'_{st,2}^2 d_{st,2}} \hat{d}X_2 - \frac{(Z_2 - Z_{st})(Y_2 - Y_{st}) \rho^{cc}}{d'_{st,2}^2 d_{st,2}} \hat{d}Y_2 + \frac{d_{st,2} \rho^{cc}}{d'_{st,2}^2} \hat{d}Z_2 +$ $+ \alpha_{st,2} - \alpha_{st,2}^{pom}$
$\alpha_{st,4}$	$\hat{V}_{\alpha_{st,4}} = \frac{(Z_4 - Z_{st})(X_4 - X_{st}) \rho^{cc}}{d'_{st,4}^2 d_{st,4}} \hat{d}X_{st} + \frac{(Z_4 - Z_{st})(Y_4 - Y_{st}) \rho^{cc}}{d'_{st,4}^2 d_{st,4}} \hat{d}Y_{st} - \frac{d_{st,4} \rho^{cc}}{d'_{st,4}^2} \hat{d}Z_{st} +$ $- \frac{(Z_4 - Z_{st})(X_4 - X_{st}) \rho^{cc}}{d'_{st,4}^2 d_{st,4}} \hat{d}X_4 - \frac{(Z_4 - Z_{st})(Y_4 - Y_{st}) \rho^{cc}}{d'_{st,4}^2 d_{st,4}} \hat{d}Y_4 + \frac{d_{st,4} \rho^{cc}}{d'_{st,4}^2} \hat{d}Z_4 +$ $+ \alpha_{st,4} - \alpha_{st,4}^{pom}$
$\alpha_{st,7}$	$\hat{V}_{\alpha_{st,7}} = \frac{(Z_7 - Z_{st})(X_7 - X_{st}) \rho^{cc}}{d'_{st,7}^2 d_{st,7}} \hat{d}X_{st} + \frac{(Z_7 - Z_{st})(Y_7 - Y_{st}) \rho^{cc}}{d'_{st,7}^2 d_{st,7}} \hat{d}Y_{st} - \frac{d_{st,7} \rho^{cc}}{d'_{st,7}^2} \hat{d}Z_{st} +$ $- \frac{(Z_7 - Z_{st})(X_7 - X_{st}) \rho^{cc}}{d'_{st,7}^2 d_{st,7}} \hat{d}X_7 - \frac{(Z_7 - Z_{st})(Y_7 - Y_{st}) \rho^{cc}}{d'_{st,7}^2 d_{st,7}} \hat{d}Y_7 + \frac{d_{st,7} \rho^{cc}}{d'_{st,7}^2} \hat{d}Z_7 +$ $+ \alpha_{st,7} - \alpha_{st,7}^{pom}$
$\alpha_{st,12}$	$\hat{V}_{\alpha_{st,12}} = \frac{(Z_{12} - Z_{st})(X_{12} - X_{st}) \rho^{cc}}{d'_{st,12}^2 d_{st,12}} \hat{d}X_{st} + \frac{(Z_{12} - Z_{st})(Y_{12} - Y_{st}) \rho^{cc}}{d'_{st,12}^2 d_{st,12}} \hat{d}Y_{st} - \frac{d_{st,12} \rho^{cc}}{d'_{st,12}^2} \hat{d}Z_{st} +$ $- \frac{(Z_{12} - Z_{st})(X_{12} - X_{st}) \rho^{cc}}{d'_{st,12}^2 d_{st,12}} \hat{d}X_{12} - \frac{(Z_{12} - Z_{st})(Y_{12} - Y_{st}) \rho^{cc}}{d'_{st,12}^2 d_{st,12}} \hat{d}Y_{12} + \frac{d_{st,12} \rho^{cc}}{d'_{st,12}^2} \hat{d}Z_{12} +$ $+ \alpha_{st,12} - \alpha_{st,12}^{pom}$

Na podstawie równań poprawek do poszczególnych obserwacji konstruuje się macierz znanych współczynników \mathbf{A} :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{d'(st)} & \mathbf{A}_{d'(2)} & \mathbf{A}_{d'(4)} & \mathbf{A}_{d'(7)} & \mathbf{A}_{d'(12)} \\ \mathbf{A}_{\beta(st)} & \mathbf{A}_{\beta(2)} & \mathbf{A}_{\beta(4)} & \mathbf{A}_{\beta(7)} & \mathbf{A}_{\beta(12)} \\ \mathbf{A}_{\alpha(st)} & \mathbf{A}_{\alpha(2)} & \mathbf{A}_{\alpha(4)} & \mathbf{A}_{\alpha(7)} & \mathbf{A}_{\alpha(12)} \end{bmatrix}$$

gdzie:

$$\mathbf{A}_{d'(st)} = \begin{bmatrix} \frac{X_{st} - X_{31}}{d'_{st,31}} & \frac{Y_{st} - Y_{31}}{d'_{st,31}} & \frac{Z_{st} - Z_{31}}{d'_{st,31}} \\ \frac{X_{st} - X_2}{d'_{st,2}} & \frac{Y_{st} - Y_2}{d'_{st,2}} & \frac{Z_{st} - Z_2}{d'_{st,2}} \\ \frac{X_{st} - X_4}{d'_{st,4}} & \frac{Y_{st} - Y_4}{d'_{st,4}} & \frac{Z_{st} - Z_4}{d'_{st,4}} \\ \frac{X_{st} - X_7}{d'_{st,7}} & \frac{Y_{st} - Y_7}{d'_{st,7}} & \frac{Z_{st} - Z_7}{d'_{st,7}} \\ \frac{X_{st} - X_{12}}{d'_{st,12}} & \frac{Y_{st} - Y_{12}}{d'_{st,12}} & \frac{Z_{st} - Z_{12}}{d'_{st,12}} \\ \frac{X_{st} - X_{29}}{d'_{st,29}} & \frac{Y_{st} - Y_{29}}{d'_{st,29}} & \frac{Z_{st} - Z_{29}}{d'_{st,29}} \\ \frac{-(X_{30} - X_{st})}{d'_{st,30}} & \frac{-(Y_{30} - Y_{st})}{d'_{st,30}} & \frac{-(Z_{30} - Z_{st})}{d'_{st,30}} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{d'(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{-(X_{st} - X_2)}{d'_{st,2}} & \frac{-(Y_{st} - Y_2)}{d'_{st,2}} & \frac{-(Z_{st} - Z_2)}{d'_{st,2}} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{d'(4)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{-(X_{st} - X_4)}{d'_{st,4}} & \frac{-(Y_{st} - Y_4)}{d'_{st,4}} & \frac{-(Z_{st} - Z_4)}{d'_{st,4}} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_{d'(7)} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{(X_{st} - X_7)}{d'_{st,7}} & -\frac{(Y_{st} - Y_7)}{d'_{st,7}} & -\frac{(Z_{st} - Z_7)}{d'_{st,7}} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\mathbf{A}_{d'(12)} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{(X_{st} - X_{12})}{d'_{st,12}} & -\frac{(Y_{st} - Y_{12})}{d'_{st,12}} & -\frac{(Z_{st} - Z_{12})}{d'_{st,12}} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\mathbf{A}_{\beta(st)} &= \begin{bmatrix} -\left[\frac{Y_{31} - Y_{st}}{d_{st,31}^2} - \frac{Y_2 - Y_{st}}{d_{st,2}^2} \right] \cdot \rho^{cc} & \left[\frac{X_{31} - X_{st}}{d_{st,31}^2} - \frac{X_2 - X_{st}}{d_{st,2}^2} \right] \cdot \rho^{cc} & 0 \\ -\left[\frac{Y_{31} - Y_{st}}{d_{st,31}^2} - \frac{Y_4 - Y_{st}}{d_{st,4}^2} \right] \cdot \rho^{cc} & \left[\frac{X_{31} - X_{st}}{d_{st,31}^2} - \frac{X_4 - X_{st}}{d_{st,4}^2} \right] \cdot \rho^{cc} & 0 \\ -\left[\frac{Y_{31} - Y_{st}}{d_{st,31}^2} - \frac{Y_7 - Y_{st}}{d_{st,7}^2} \right] \cdot \rho^{cc} & \left[\frac{X_{31} - X_{st}}{d_{st,31}^2} - \frac{X_7 - X_{st}}{d_{st,7}^2} \right] \cdot \rho^{cc} & 0 \\ -\left[\frac{Y_{31} - Y_{st}}{d_{st,31}^2} - \frac{Y_{12} - Y_{st}}{d_{st,12}^2} \right] \cdot \rho^{cc} & \left[\frac{X_{31} - X_{st}}{d_{st,31}^2} - \frac{X_{12} - X_{st}}{d_{st,12}^2} \right] \cdot \rho^{cc} & 0 \\ -\left[\frac{Y_2 - Y_{st}}{d_{st,2}^2} - \frac{Y_{29} - Y_{st}}{d_{st,29}^2} \right] \cdot \rho^{cc} & \left[\frac{X_2 - X_{st}}{d_{st,2}^2} - \frac{X_{29} - X_{st}}{d_{st,29}^2} \right] \cdot \rho^{cc} & 0 \\ -\left[\frac{Y_4 - Y_{st}}{d_{st,4}^2} - \frac{Y_{29} - Y_{st}}{d_{st,29}^2} \right] \cdot \rho^{cc} & \left[\frac{X_4 - X_{st}}{d_{st,4}^2} - \frac{X_{29} - X_{st}}{d_{st,29}^2} \right] \cdot \rho^{cc} & 0 \\ -\left[\frac{Y_7 - Y_{st}}{d_{st,7}^2} - \frac{Y_{29} - Y_{st}}{d_{st,29}^2} \right] \cdot \rho^{cc} & \left[\frac{X_7 - X_{st}}{d_{st,7}^2} - \frac{X_{29} - X_{st}}{d_{st,29}^2} \right] \cdot \rho^{cc} & 0 \\ -\left[\frac{Y_{12} - Y_{st}}{d_{st,12}^2} - \frac{Y_{29} - Y_{st}}{d_{st,29}^2} \right] \cdot \rho^{cc} & \left[\frac{X_{12} - X_{st}}{d_{st,12}^2} - \frac{X_{29} - X_{st}}{d_{st,29}^2} \right] \cdot \rho^{cc} & 0 \\ -\left[\frac{Y_{29} - Y_{st}}{d_{st,29}^2} - \frac{Y_{30} - Y_{st}}{d_{st,30}^2} \right] \cdot \rho^{cc} & \left[\frac{X_{29} - X_{st}}{d_{st,29}^2} - \frac{X_{30} - X_{st}}{d_{st,30}^2} \right] \cdot \rho^{cc} & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_{\beta(2)} &= \begin{bmatrix} \frac{-(Y_2 - Y_{st}) \cdot \rho^{cc}}{d_{st,2}^2} & \frac{(X_2 - X_{st}) \cdot \rho^{cc}}{d_{st,2}^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{(Y_2 - Y_{st}) \cdot \rho^{cc}}{d_{st,2}^2} & \frac{-(X_2 - X_{st}) \cdot \rho^{cc}}{d_{st,2}^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\mathbf{A}_{\beta(4)} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{-(Y_4 - Y_{st}) \cdot \rho^{cc}}{d_{st,4}^2} & \frac{(X_4 - X_{st}) \cdot \rho^{cc}}{d_{st,4}^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{(Y_4 - Y_{st}) \cdot \rho^{cc}}{d_{st,4}^2} & \frac{-(X_4 - X_{st}) \cdot \rho^{cc}}{d_{st,4}^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\mathbf{A}_{\beta(7)} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{-(Y_7 - Y_{st}) \cdot \rho^{cc}}{d_{st,7}^2} & \frac{(X_7 - X_{st}) \cdot \rho^{cc}}{d_{st,7}^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{(Y_7 - Y_{st}) \cdot \rho^{cc}}{d_{st,7}^2} & \frac{-(X_7 - X_{st}) \cdot \rho^{cc}}{d_{st,7}^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\mathbf{A}_{\beta(12)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{-(Y_{12} - Y_{st}) \cdot \rho^{cc}}{d_{st,12}^2} & \frac{(X_{12} - X_{st}) \cdot \rho^{cc}}{d_{st,12}^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{(Y_{12} - Y_{st}) \cdot \rho^{cc}}{d_{st,12}^2} & \frac{-(X_{12} - X_{st}) \cdot \rho^{cc}}{d_{st,12}^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{\alpha(st)} = \begin{bmatrix} \frac{(Z_{31} - Z_{st}) \cdot (X_{31} - X_{st}) \cdot \rho^{cc}}{d_{st,31}^2 \cdot d_{st,31}} & \frac{(Z_{31} - Z_{st}) \cdot (Y_{31} - Y_{st}) \cdot \rho^{cc}}{d_{st,31}^2 \cdot d_{st,31}} & \frac{-d_{st,31} \cdot \rho^{cc}}{d_{st,31}^2} \\ \frac{(Z_2 - Z_{st}) \cdot (X_2 - X_{st}) \cdot \rho^{cc}}{d_{st,2}^2 \cdot d_{st,2}} & \frac{(Z_2 - Z_{st}) \cdot (Y_2 - Y_{st}) \cdot \rho^{cc}}{d_{st,2}^2 \cdot d_{st,2}} & \frac{-d_{st,2} \cdot \rho^{cc}}{d_{st,2}^2} \\ \frac{(Z_4 - Z_{st}) \cdot (X_4 - X_{st}) \cdot \rho^{cc}}{d_{st,4}^2 \cdot d_{st,4}} & \frac{(Z_4 - Z_{st}) \cdot (Y_4 - Y_{st}) \cdot \rho^{cc}}{d_{st,4}^2 \cdot d_{st,4}} & \frac{-d_{st,4} \cdot \rho^{cc}}{d_{st,4}^2} \\ \frac{(Z_7 - Z_{st}) \cdot (X_7 - X_{st}) \cdot \rho^{cc}}{d_{st,7}^2 \cdot d_{st,7}} & \frac{(Z_7 - Z_{st}) \cdot (Y_7 - Y_{st}) \cdot \rho^{cc}}{d_{st,7}^2 \cdot d_{st,7}} & \frac{-d_{st,7} \cdot \rho^{cc}}{d_{st,7}^2} \\ \frac{(Z_{12} - Z_{st}) \cdot (X_{12} - X_{st}) \cdot \rho^{cc}}{d_{st,12}^2 \cdot d_{st,12}} & \frac{(Z_{12} - Z_{st}) \cdot (Y_{12} - Y_{st}) \cdot \rho^{cc}}{d_{st,12}^2 \cdot d_{st,12}} & \frac{-d_{st,12} \cdot \rho^{cc}}{d_{st,12}^2} \\ \frac{(Z_{29} - Z_{st}) \cdot (X_{29} - X_{st}) \cdot \rho^{cc}}{d_{st,29}^2 \cdot d_{st,29}} & \frac{(Z_{29} - Z_{st}) \cdot (Y_{29} - Y_{st}) \cdot \rho^{cc}}{d_{st,29}^2 \cdot d_{st,29}} & \frac{-d_{st,29} \cdot \rho^{cc}}{d_{st,29}^2} \\ \frac{(Z_{30} - Z_{st}) \cdot (X_{30} - X_{st}) \cdot \rho^{cc}}{d_{st,30}^2 \cdot d_{st,30}} & \frac{(Z_{30} - Z_{st}) \cdot (Y_{30} - Y_{st}) \cdot \rho^{cc}}{d_{st,30}^2 \cdot d_{st,30}} & \frac{-d_{st,30} \cdot \rho^{cc}}{d_{st,30}^2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{\alpha(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{-(Z_2 - Z_{st}) \cdot (X_2 - X_{st}) \cdot \rho^{cc}}{d_{st,2}^2 \cdot d_{st,2}} & \frac{-(Z_2 - Z_{st}) \cdot (Y_2 - Y_{st}) \cdot \rho^{cc}}{d_{st,2}^2 \cdot d_{st,2}} & \frac{d_{st,2} \cdot \rho^{cc}}{d_{st,2}^2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{\alpha(4)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{-(Z_4 - Z_{st}) \cdot (X_4 - X_{st}) \cdot \rho^{cc}}{d_{st,4}^2 \cdot d_{st,4}} & \frac{-(Z_4 - Z_{st}) \cdot (Y_4 - Y_{st}) \cdot \rho^{cc}}{d_{st,4}^2 \cdot d_{st,4}} & \frac{d_{st,4} \cdot \rho^{cc}}{d_{st,4}^2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{\alpha(7)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{-(Z_7 - Z_{st}) \cdot (X_7 - X_{st}) \cdot \rho^{cc}}{d_{st,7}^2 \cdot d_{st,7}} & \frac{-(Z_7 - Z_{st}) \cdot (Y_7 - Y_{st}) \cdot \rho^{cc}}{d_{st,7}^2 \cdot d_{st,7}} & \frac{d_{st,7} \cdot \rho^{cc}}{d_{st,7}^2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{\alpha(12)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{-(Z_{12} - Z_{st}) \cdot (X_{12} - X_{st}) \cdot \rho^{cc}}{d_{st,12}^2 \cdot d_{st,12}} & \frac{-(Z_{12} - Z_{st}) \cdot (Y_{12} - Y_{st}) \cdot \rho^{cc}}{d_{st,12}^2 \cdot d_{st,12}} & \frac{d_{st,12} \cdot \rho^{cc}}{d_{st,12}^2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Do wyrównania tradycyjną metodą najmniejszych kwadratów przyjęto błędy średnie pomiaru zamieszczone w specyfikacji tachimetru, którym pomiar wykonano. Ich wartości zestawiono w tabeli 3.6.

Tabela 3.6. Wartości błędów średnich obserwacji przyjęte do wyrównania z wykorzystaniem globalnego współczynnika wariancji (źródło: [24])

Grupa obserwacji	Błąd średni pomiaru	Wartość błędu średniego pomiaru
Odległości	m_d	0,001m
Kąty poziome	m_β	0,0003 ^g
Kąty pionowe	m_α	0,0003 ^g

W procesie wyrównania niezwykle istotne jest określenie liczby obserwacji – n oraz liczby parametrów – k . W przypadku przeprowadzenia wyrównania pomiarów wykonanych do punktów kontrolowanych dachu Opery Leśnej w Sopocie, ilość obserwacji wynosi 23, natomiast liczba parametrów – 15. Liczba obserwacji oraz wartości błędów średnich

Obliczenia z wykorzystaniem zależności (2.6), (2.8) i (2.9) wykonano dla zbiorów obserwacji pomiaru pierwotnego (wyjściowego) i aktualnego.

Uzyskane po wyrównaniu wartości estymatora globalnego współczynnika wariancji $\hat{\sigma}_0^2 = m_0^2$ przedstawiono w tabeli 3.7.

Tabela 3.7. Wartości współczynników m_0^2 wyznaczone w wyrównaniu obserwacji z dwóch niezależnych epok pomiarowych (źródło: opracowanie własne)

	Pomiar pierwotny (EP) (0. epoka pomiarowa – 16.01.2014)	Pomiar aktualny (EA) (1. epoka pomiarowa – 30.06.2014)
m_0^2	126,62	15,17
m_0	11,25	3,89

Wektory wyrównanych współrzędnych punktów kontrolowanych wyznaczone z pomiaru wyjściowego $\hat{\mathbf{X}}_{(EP)}$ oraz pomiaru aktualnego $\hat{\mathbf{X}}_{(EA)}$ przyjęły postać:

$$\hat{\mathbf{X}}_{(EP)} = \begin{bmatrix} \hat{X}_{st} \\ \hat{Y}_{st} \\ \hat{Z}_{st} \\ \hat{X}_2 \\ \hat{Y}_2 \\ \hat{Z}_2 \\ \hat{X}_4 \\ \hat{Y}_4 \\ \hat{Z}_2 \\ \hat{X}_7 \\ \hat{Y}_7 \\ \hat{Z}_2 \\ \hat{X}_{12} \\ \hat{Y}_{12} \\ \hat{Z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,008 \\ 0,004 \\ -0,011 \\ 18,555 \\ -27,740 \\ 1,665 \\ 3,862 \\ -27,092 \\ -1,743 \\ 5,053 \\ -26,124 \\ -1,045 \\ 31,301 \\ -45,216 \\ -3,753 \end{bmatrix} [\text{m}] \quad \hat{\mathbf{X}}_{(EA)} = \begin{bmatrix} \hat{X}_{st} \\ \hat{Y}_{st} \\ \hat{Z}_{st} \\ \hat{X}_2 \\ \hat{Y}_2 \\ \hat{Z}_2 \\ \hat{X}_4 \\ \hat{Y}_4 \\ \hat{Z}_2 \\ \hat{X}_7 \\ \hat{Y}_7 \\ \hat{Z}_2 \\ \hat{X}_{12} \\ \hat{Y}_{12} \\ \hat{Z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,000 \\ 0,001 \\ 0,006 \\ 18,556 \\ -27,746 \\ 1,690 \\ 3,853 \\ -27,103 \\ -1,696 \\ 5,037 \\ -26,144 \\ -0,976 \\ 31,297 \\ -45,219 \\ -3,751 \end{bmatrix} [\text{m}]$$

Wektory poprawek $\hat{\mathbf{V}}$ do wyników pomiaru przedstawiają się następująco:

$$\hat{\mathbf{V}}_{(EP)} = \begin{bmatrix} +0,0073\text{m} \\ 0,0000\text{m} \\ 0,0000\text{m} \\ 0,0000\text{m} \\ +0,0001\text{m} \\ 0,0000\text{m} \\ -0,0106\text{m} \\ -0,9^{\text{cc}} \\ -0,9^{\text{cc}} \\ -0,9^{\text{cc}} \\ -0,6^{\text{cc}} \\ -0,9^{\text{cc}} \\ -0,9^{\text{cc}} \\ -0,9^{\text{cc}} \\ -0,5^{\text{cc}} \\ +11,6^{\text{cc}} \\ -33,4^{\text{cc}} \\ 0,0^{\text{cc}} \\ 0,0^{\text{cc}} \\ 0,0^{\text{cc}} \\ 0,0^{\text{cc}} \\ +46,0^{\text{cc}} \\ +59,6^{\text{cc}} \end{bmatrix} \quad \hat{\mathbf{V}}_{(EA)} = \begin{bmatrix} +0,0002\text{m} \\ 0,0000\text{m} \\ 0,0000\text{m} \\ 0,0000\text{m} \\ -0,0002\text{m} \\ -0,0035\text{m} \\ -0,0027\text{m} \\ -1,0^{\text{cc}} \\ -1,0^{\text{cc}} \\ -1,0^{\text{cc}} \\ +1,1^{\text{cc}} \\ -1,0^{\text{cc}} \\ -1,0^{\text{cc}} \\ -1,0^{\text{cc}} \\ +1,0^{\text{cc}} \\ +11,6^{\text{cc}} \\ -11,5^{\text{cc}} \\ 0,0^{\text{cc}} \\ 0,0^{\text{cc}} \\ 0,0^{\text{cc}} \\ 0,0^{\text{cc}} \\ +16,6^{\text{cc}} \\ +19,2^{\text{cc}} \end{bmatrix}$$

gdzie:

$\hat{\mathbf{V}}_{(EP)}$ - wektor poprawek do wyników pomiaru pierwotnego,

$\hat{\mathbf{V}}_{(EA)}$ - wektor poprawek do wyników pomiaru aktualnego.

Estymowane macierze kowariancji $\hat{\mathbf{C}}_{\hat{\mathbf{x}}}$ uzyskały wartości:

$$\hat{\mathbf{C}}_{\hat{\mathbf{x}}_{St}(EP)} = \begin{bmatrix} 1,9661 \cdot 10^{-5} & 1,2942 \cdot 10^{-5} & 4,1364 \cdot 10^{-6} \\ 1,2942 \cdot 10^{-5} & 9,4558 \cdot 10^{-6} & 2,8548 \cdot 10^{-6} \\ 4,1364 \cdot 10^{-6} & 2,8548 \cdot 10^{-6} & 2,5883 \cdot 10^{-6} \end{bmatrix} \quad \hat{\mathbf{C}}_{\hat{\mathbf{x}}_{St}(EA)} = \begin{bmatrix} 2,3526 \cdot 10^{-6} & 1,5488 \cdot 10^{-6} & 4,9628 \cdot 10^{-7} \\ 1,5488 \cdot 10^{-6} & 1,1318 \cdot 10^{-6} & 3,4257 \cdot 10^{-7} \\ 4,9628 \cdot 10^{-7} & 3,4257 \cdot 10^{-7} & 3,1058 \cdot 10^{-7} \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{C}}_{\hat{\mathbf{x}}_2(EP)} = \begin{bmatrix} 4,9634 \cdot 10^{-5} & -5,1222 \cdot 10^{-5} & 6,3375 \cdot 10^{-6} \\ -5,1222 \cdot 10^{-5} & 9,3027 \cdot 10^{-5} & -3,1121 \cdot 10^{-6} \\ 6,3375 \cdot 10^{-6} & -3,1121 \cdot 10^{-6} & 6,0381 \cdot 10^{-6} \end{bmatrix} \quad \hat{\mathbf{C}}_{\hat{\mathbf{x}}_2(EA)} = \begin{bmatrix} 5,9453 \cdot 10^{-6} & -6,1369 \cdot 10^{-6} & 7,6157 \cdot 10^{-7} \\ -6,1369 \cdot 10^{-6} & 1,1141 \cdot 10^{-5} & -3,7513 \cdot 10^{-7} \\ 7,6157 \cdot 10^{-7} & -3,7513 \cdot 10^{-7} & 7,2435 \cdot 10^{-7} \end{bmatrix}$$

$$\hat{C}_{\hat{x}_{4}(EP)} = \begin{bmatrix} 1,3258 \cdot 10^{-5} & -8,7634 \cdot 10^{-6} & 1,8228 \cdot 10^{-6} \\ -8,7634 \cdot 10^{-6} & 1,3208 \cdot 10^{-4} & 1,0454 \cdot 10^{-5} \\ 1,8228 \cdot 10^{-6} & 1,0454 \cdot 10^{-5} & 5,1997 \cdot 10^{-6} \end{bmatrix} \quad \hat{C}_{\hat{x}_{4}(EA)} = \begin{bmatrix} 1,5860 \cdot 10^{-6} & -1,0491 \cdot 10^{-6} & 2,2132 \cdot 10^{-7} \\ -1,0491 \cdot 10^{-6} & 1,5823 \cdot 10^{-5} & 1,2364 \cdot 10^{-6} \\ 2,2132 \cdot 10^{-7} & 1,2364 \cdot 10^{-6} & 6,2141 \cdot 10^{-7} \end{bmatrix}$$

$$\hat{C}_{\hat{x}_{7}(EP)} = \begin{bmatrix} 1,5524 \cdot 10^{-5} & -1,4736 \cdot 10^{-5} & 2,0547 \cdot 10^{-6} \\ -1,4736 \cdot 10^{-5} & 1,3006 \cdot 10^{-4} & 7,3785 \cdot 10^{-6} \\ 2,0547 \cdot 10^{-6} & 7,3785 \cdot 10^{-6} & 4,7703 \cdot 10^{-6} \end{bmatrix} \quad \hat{C}_{\hat{x}_{7}(EA)} = \begin{bmatrix} 1,8550 \cdot 10^{-6} & -1,7598 \cdot 10^{-6} & 2,5241 \cdot 10^{-7} \\ -1,7598 \cdot 10^{-6} & 1,5584 \cdot 10^{-5} & 8,5571 \cdot 10^{-7} \\ 2,5241 \cdot 10^{-7} & 8,5571 \cdot 10^{-7} & 5,6998 \cdot 10^{-7} \end{bmatrix}$$

$$\hat{C}_{\hat{x}_{12}(EP)} = \begin{bmatrix} 3,8830 \cdot 10^{-5} & -4,2713 \cdot 10^{-5} & -1,2797 \cdot 10^{-6} \\ -4,2713 \cdot 10^{-5} & 8,4038 \cdot 10^{-5} & 7,1961 \cdot 10^{-6} \\ -1,2797 \cdot 10^{-6} & 7,1961 \cdot 10^{-6} & 1,1574 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix} \quad \hat{C}_{\hat{x}_{12}(EA)} = \begin{bmatrix} 4,6411 \cdot 10^{-6} & -5,1044 \cdot 10^{-6} & -1,5339 \cdot 10^{-7} \\ -5,1044 \cdot 10^{-6} & 1,0053 \cdot 10^{-5} & 8,6370 \cdot 10^{-7} \\ -1,5339 \cdot 10^{-7} & 8,6370 \cdot 10^{-7} & 1,3873 \cdot 10^{-6} \end{bmatrix}$$

gdzie:

- $\hat{C}_{\hat{x}_{st}(EP)}$ – estymowana macierz kowariancji wektora parametrów (stanowisko tachimetru – pomiar pierwotny),
- $\hat{C}_{\hat{x}_{st}(EA)}$ – estymowana macierz kowariancji wektora parametrów (stanowisko tachimetru – pomiar aktualny),
- $\hat{C}_{\hat{x}_{2}(EP)}$ – estymowana macierz kowariancji wektora parametrów (punkt kontrolowany nr 2 – pomiar pierwotny),
- $\hat{C}_{\hat{x}_{2}(EA)}$ – estymowana macierz kowariancji wektora parametrów (punkt kontrolowany nr 2 – pomiar aktualny),
- $\hat{C}_{\hat{x}_{4}(EP)}$ – estymowana macierz kowariancji wektora parametrów (punkt kontrolowany nr 4 – pomiar pierwotny),
- $\hat{C}_{\hat{x}_{4}(EA)}$ – estymowana macierz kowariancji wektora parametrów (punkt kontrolowany nr 4 – pomiar aktualny),
- $\hat{C}_{\hat{x}_{7}(EP)}$ – estymowana macierz kowariancji wektora parametrów (punkt kontrolowany nr 7 – pomiar pierwotny),
- $\hat{C}_{\hat{x}_{7}(EA)}$ – estymowana macierz kowariancji wektora parametrów (punkt kontrolowany nr 7 – pomiar aktualny),
- $\hat{C}_{\hat{x}_{12}(EP)}$ – estymowana macierz kowariancji wektora parametrów (punkt kontrolowany nr 12 – pomiar pierwotny),
- $\hat{C}_{\hat{x}_{12}(EA)}$ – estymowana macierz kowariancji wektora parametrów (punkt kontrolowany nr 12 – pomiar aktualny).

Błędy położenia punktów, obliczone na podstawie estymowanych macierzy kowariancji wektora parametrów, po wyrównaniu z wykorzystaniem globalnego współczynnika wariancji zestawiono w tabeli 3.8. Błąd położenia każdego kontrolowanego punktu policzono z zależności:

$$m_p = \sqrt{m_x^2 + m_y^2} \quad (3.1)$$

Tabela 3.8. Błędy położenia punktów – wyrównanie metodą najmniejszych kwadratów (źródło: opracowanie własne)

	Pomiar pierwotny (EP) (0. epoka pomiarowa – 16.01.2014)	Pomiar aktualny (EA) (1. epoka pomiarowa – 30.06.2014)
m_{st}	0,008 m	0,003 m
m_2	0,007 m	0,002 m
m_4	0,013 m	0,004 m
m_7	0,012 m	0,004 m
m_{12}	0,008 m	0,003 m

Wyrównane współrzędne stanowiska tachimetru i punktów kontrolowanych oraz ich przemieszczenia przedstawiono w tabeli 3.9.

Tabela 3.9. Współrzędne stanowiska tachimetru i punktów kontrolowanych oraz ich składowe przemieszczenia – wyrównanie metodą najmniejszych kwadratów (źródło: opracowanie własne)

Punkt	Pomiar pierwotny (16.01.2014)			Pomiar aktualny (30.01.2014)			$\Delta\hat{X}$ [m]	$\Delta\hat{Y}$ [m]	$\Delta\hat{Z}$ [m]
	$\hat{X}_{(EP)}$ [m]	$\hat{Y}_{(EP)}$ [m]	$\hat{Z}_{(EP)}$ [m]	$\hat{X}_{(EA)}$ [m]	$\hat{Y}_{(EA)}$ [m]	$\hat{Z}_{(EA)}$ [m]			
<i>st</i>	0,008	0,004	-0,011	0,000	0,001	0,006	-0,008	-0,003	0,017
2	18,555	-27,740	1,665	18,556	-27,746	1,690	0,001	-0,006	0,025
4	3,862	-27,092	-1,743	3,853	-27,103	-1,696	-0,009	-0,011	0,047
7	5,053	-26,124	-1,045	5,037	-26,144	-0,976	-0,016	-0,020	0,069
12	31,301	-45,216	-3,753	31,297	-45,219	-3,751	-0,004	-0,003	0,002

W niniejszej pracy przemieszczenia pionowe punktu kontrolowanego uznaje się za istotne w przypadku, gdy jego bezwzględna wartość przekracza 2-krotną wartość błędu średniego przemieszczenia pionowego $m_{\Delta\hat{Z}}$. Istotność przemieszczeń punktów objętych analizą w niniejszej pracy określono w tabeli 3.10.

Tabela 3.10. Istotność wyznaczonych przemieszczeń pionowych – z wykorzystaniem globalnego współczynnika wariancji (źródło: opracowanie własne)

Punkt	$\Delta\hat{Z}$ [m]	$m_{\Delta\hat{Z}}$ [m]	$2m_{\Delta\hat{Z}}$ [m]	Istotność przemieszczenia
<i>st</i>	+0,017	0,002	0,004	ISTOTNE
2	+0,025	0,003	0,006	ISTOTNE
4	+0,047	0,002	0,004	ISTOTNE
7	+0,069	0,002	0,004	ISTOTNE
12	+0,002	0,004	0,008	NIEISTOTNE

Natomiast istotność omówionych w rozdziale 2 przemieszczeń poziomych ocenia się sprawdzając, czy wektor przemieszczenia poziomego wykracza poza elipsę błędów. Jeżeli tak, przemieszczenie uznaje się za istotne. Jeżeli wektor przemieszczenia poziomego znajduje się wewnątrz elipsy granicznej przemieszczenie nie jest istotne. W tabeli 3.11. zestawiono parametry elips granicznych przemieszczeń stanowiska tachimetru i punktów kontrolowanych.

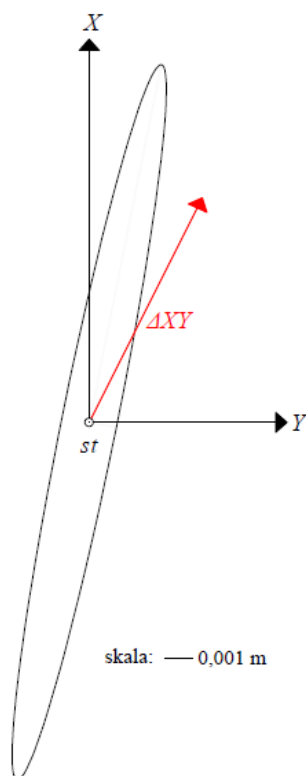
Tabela 3.11. Parametry elips granicznych wyznaczone dla przemieszczeń punktów – z wykorzystaniem estymatora globalnego współczynnika wariancji (źródło: opracowanie własne)

Punkt	PÓŁOSIE ELIPSY GRANICZNEJ		Kąt skręcenia φ [°]
	a [m]	b [m]	
st	0,0013	$9,77 \cdot 10^{-4}$	12,5916
2	0,0150	0,0017	37,5249
4	0,0141	0,0014	8,9978
7	0,0150	0,0014	12,1352
12	0,0141	0,0030	33,7073

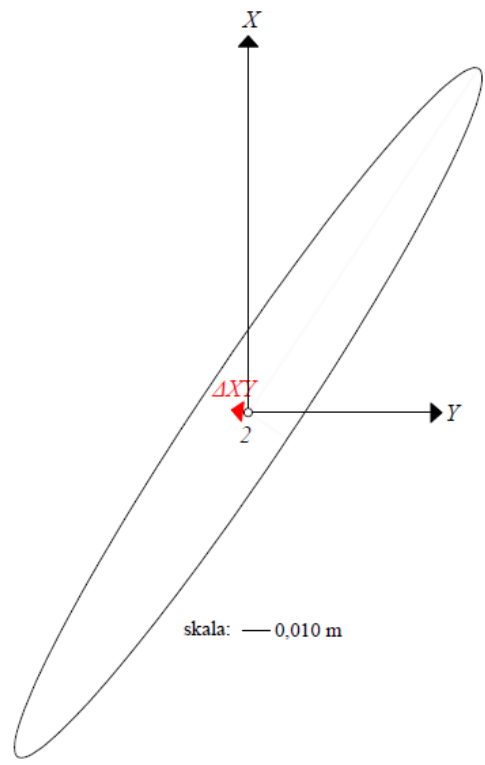
Na rysunkach 3.10 – 3.14 przedstawiono wektory przemieszczeń poziomych analizowanych punktów wyznaczone ze wzoru

$$\Delta XY = \sqrt{(\Delta \hat{X})^2 + (\Delta \hat{Y})^2} \quad (3.2)$$

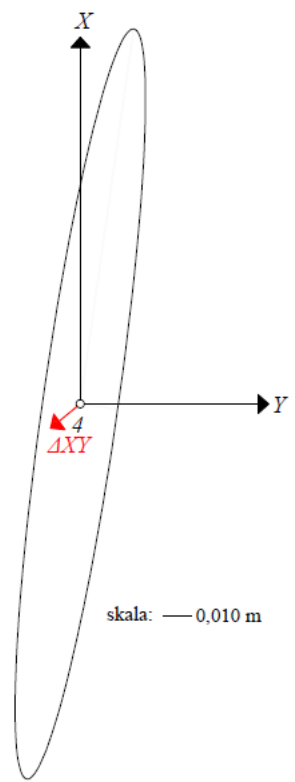
oraz elipsy błędów tych przemieszczeń.



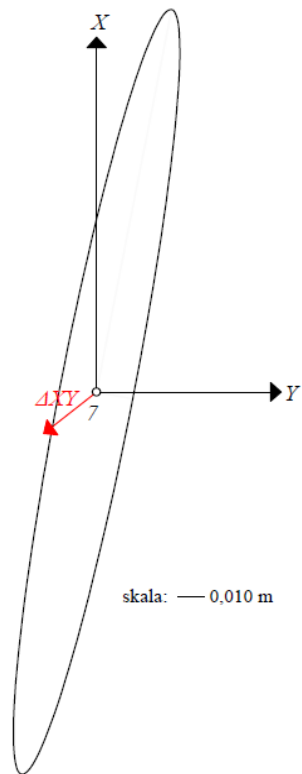
Rys. 3.10. Przemieszczenie poziome stanowiska tachimetru oraz elipsa błędów tego przemieszczenia (źródło: opracowanie własne)



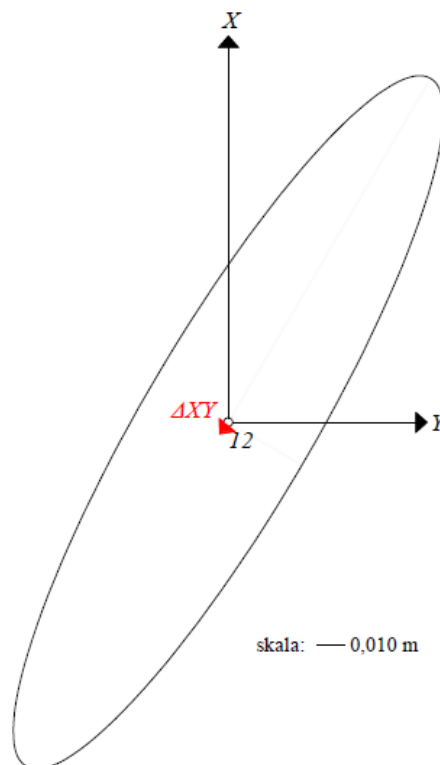
Rys. 3.11. Przemieszczenie poziome punktu kontrolowanego nr 2 oraz elipsa błędu tego przemieszczenia (źródło: opracowanie własne)



Rys. 3.12. Przemieszczenie poziome punktu kontrolowanego nr 4 oraz elipsa błędu tego (źródło: opracowanie własne)



Rys. 3.13. Przeszczenie poziome punktu kontrolowanego nr 7 oraz elipsa błędu tego przeszczenia (źródło: opracowanie własne)



Rys. 3.14. Przeszczenie poziome punktu kontrolowanego nr 12 oraz elipsa błędu tego przeszczenia (źródło: opracowanie własne)

W tabeli 3.12. przedstawiono zbiorcze zestawienie przeszczeń stanowiska tachimetru i punktów kontrolowanych wraz z oceną ich istotności.

Tabela 3.12. Przemieszczenia punktów z oceną ich istotności – z wykorzystaniem globalnego współczynnika wariancji (źródło: opracowanie własne)

Punkt	PRZEMIESZCZENIA POZIOME		PRZEMIESZCZENIA PIONOWE	
	ΔXY [m]	ISTOTNOŚĆ	ΔZ [m]	ISTOTNOŚĆ
<i>st</i>	0,008	ISTOTNE	+0,017	ISTOTNE
2	0,006	NIEISTOTNE	+0,025	ISTOTNE
4	0,014	NIEISTOTNE	+0,047	ISTOTNE
7	0,026	ISTOTNE	+0,069	ISTOTNE
12	0,005	NIEISTOTNE	+0,002	NIEISTOTNE

3.3.1. Wyniki pomiarów i przyjęte do obliczeń wartości macierzy i wektorów

W tabeli 3.13. przedstawiono wartości obserwacji odległości przestrzennych d^{pom} , kierunków poziomych H_z^{pom} oraz kątów zenitalnych z^{pom} wykonanych w ramach geodezyjnego monitoringu przemieszczeń zadaszania Opery Leśnej w Sopocie w dniach: 16.01.2014 (pomiar pierwotny) oraz 30.06.2014 (pomiar aktualny). Podano także wartości: macierzy współczynników \mathbf{A} , wektorów \mathbf{L} oraz przyrostów do parametrów $\hat{\mathbf{d}}_x$.

Tabela 3.13. Wartości obserwacji (źródło: opracowanie własne)

Numer punktu	Pomiar pierwotny (EP) (16.01.2014)			Pomiar aktualny (EA) (30.06.2014)		
	d^{pom} [m]	H_z^{pom} [g]	z^{pom} [g]	d^{pom} [m]	H_z^{pom} [g]	z^{pom} [g]
29	82,024	285,3747	104,5721	82,028	285,3878	104,5818
30	87,735	316,3201	107,2487	87,737	316,3301	107,2561
31	26,238	152,6173	114,6574	26,241	152,6372	114,7036
2	33,414	237,4307	96,8065	33,423	237,4513	96,7920
4	27,424	208,9115	104,0242	27,429	208,9163	103,9529
7	26,631	212,0599	102,0599	26,644	212,0426	102,3478
12	55,118	238,4537	104,3262	55,122	238,4679	104,3428

Na podstawie danych z tabeli 3.13. obliczono wartości kątów poziomych β^{pom} dla pomiaru pierwotnego oraz pomiaru aktualnego – ich wartości przedstawiono w tabeli 3.14.

Tabela 3.14. Obliczone wartości kątów poziomych (źródło: opracowanie własne)

	Pomiar pierwotny (EP) (16.01.2014)	Pomiar aktualny (EA) (30.06.2014)
	[g]	
$\beta_{31,st,2}^{pom}$	84,8134	84,8141
$\beta_{2,st,29}^{pom}$	47,9440	47,9365
$\beta_{29,st,30}^{pom}$	30,9454	30,9423
$\beta_{31,st,4}^{pom}$	56,2942	56,2791
$\beta_{4,st,29}^{pom}$	76,4632	76,4715
$\beta_{31,st,7}^{pom}$	59,4426	59,4054
$\beta_{7,st,29}^{pom}$	73,3148	73,3452
$\beta_{31,st,12}^{pom}$	85,8364	85,8307
$\beta_{12,st,29}^{pom}$	46,9210	46,9199
$\beta_{29,31,st}^{pom}$	52,5148	52,5209
$\beta_{31,29,st}^{pom}$	14,7309	14,7313

Tabela 3.15 zawiera obliczone na podstawie obserwacji (tabela 3.13.) wartości kątów pionowych α^{pom} .

Tabela 3.15. Obliczone wartości kątów pionowych (źródło: opracowanie własne)

	Pomiar pierwotny (EP) (16.01.2014)	Pomiar aktualny (EA) (30.06.2014)
	[g]	
$\alpha_{st,31}^{pom}$	-14,6574	-14,7036
$\alpha_{st,2}^{pom}$	3,1935	3,2080
$\alpha_{st,29}^{pom}$	-4,5721	-4,5818
$\alpha_{st,30}^{pom}$	-7,2487	-7,2561
$\alpha_{st,4}^{pom}$	-4,0242	-3,9529
$\alpha_{st,7}^{pom}$	-2,4731	-2,3478
$\alpha_{st,12}^{pom}$	-4,3262	-4,3428

Odległości poziome d^{pom} obliczone na podstawie obserwacji zamieszczono w tabeli 3.16.

Tabela 3.16. Obliczone wartości odległości poziomych (źródło: opracowanie własne)

	Pomiar pierwotny (EP) (16.01.2014)	Pomiar aktualny (EA) (30.06.2014)
	[m]	
$d_{st,29}^{pom}$	81,813	81,815
$d_{st,30}^{pom}$	87,167	87,168
$d_{st,31}^{pom}$	25,545	25,544
$d_{st,2}^{pom}$	33,372	33,381
$d_{st,4}^{pom}$	27,369	27,376
$d_{st,7}^{pom}$	26,610	26,626
$d_{st,12}^{pom}$	54,991	54,994

Tabela 3.17. przedstawia przyrosty boków wcinających: $\Delta X^0, \Delta Y^0, \Delta Z^0$ obliczone na podstawie obserwacji:

Tabela 3.17. Obliczone przyrosty boków wcinających (źródło: opracowanie własne)

	Pomiar pierwotny (EP) (16.01.2014)	Pomiar aktualny (EA) (30.06.2014)
	[m]	
$\Delta X^0_{st,31}$	+17,279	+17,276
$\Delta Y^0_{st,31}$	+18,815	+18,816
$\Delta Z^0_{st,31}$	-5,988	-6,007
$\Delta X^0_{st,29}$	-79,689	-79,691
$\Delta Y^0_{st,29}$	+18,520	+18,522
$\Delta Z^0_{st,29}$	-5,886	-5,898
$\Delta X^0_{st,2}$	+18,550	+18,558
$\Delta Y^0_{st,2}$	-27,742	-27,747
$\Delta Z^0_{st,2}$	+1,676	+1,684
$\Delta X^0_{st,4}$	+3,857	+3,854
$\Delta Y^0_{st,4}$	-27,096	-27,104
$\Delta Z^0_{st,4}$	-1,732	-1,702
$\Delta X^0_{st,7}$	+5,048	+5,038
$\Delta Y^0_{st,7}$	-26,127	-26,145
$\Delta Z^0_{st,7}$	-1,034	-0,982

	Pomiar pierwotny (<i>EP</i>) (16.01.2014)	Pomiar aktualny (<i>EA</i>) (30.06.2014)
$\Delta X^0_{st,12}$	+31,298	+31,300
$\Delta Y^0_{st,12}$	-45,216	-45,218
$\Delta Z^0_{st,12}$	-3,743	-3,757

Współrzędne przybliżone X^0, Y^0, Z^0 stanowiska tachimetru i punktów kontrolowanych zamieszczono w tabeli 3.18.

Tabela 3.18. Współrzędne przybliżone (źródło: opracowanie własne)

Punkt	Pomiar pierwotny (<i>EP</i>) (16.01.2014)			Pomiar aktualny (<i>EA</i>) (30.06.2014)		
	X^0 [m]	Y^0 [m]	Z^0 [m]	X^0 [m]	Y^0 [m]	Z^0 [m]
<i>st</i>	0,000	0,000	-0,009	-0,002	0,002	0,007
2	18,550	-27,741	1,667	18,555	-27,745	1,691
4	3,857	-27,095	-1,741	3,852	-27,102	-1,695
7	5,048	-26,127	-1,043	5,036	-26,144	-0,975
12	31,298	-45,215	-3,752	31,297	-45,217	-3,7501

Obliczone ze współrzędnych przybliżonych odległości przestrzenne d^0 oraz odległości poziome d^0 dla dwóch epok pomiarowych zestawiono w tabeli 3.19.

Tabela 3.19. Odległości przestrzenne i poziome obliczone ze współrzędnych przybliżonych (źródło: opracowanie własne)

	Pomiar pierwotny (<i>EP</i>) (16.01.2014)	Pomiar aktualny (<i>EA</i>) (30.06.2014)
	[m]	
$d^0_{st,31}$	26,237	26,241
$d^0_{st,31}$	25,544	25,544
$d^0_{st,29}$	82,023	82,026
$d^0_{st,29}$	81,812	81,814
$d^0_{st,30}$	87,733	87,737
$d^0_{st,30}$	87,166	87,168
$d^0_{st,2}$	33,414	33,423
$d^0_{st,2}$	33,372	33,381
$d^0_{st,4}$	27,424	27,429
$d^0_{st,4}$	27,369	27,376
$d^0_{st,7}$	26,630	26,644

	Pomiar pierwotny (<i>EP</i>) (16.01.2014)	Pomiar aktualny (<i>EA</i>) (30.06.2014)
$d_{st,7}^0$	26,610	26,626
$d_{st,12}^0$	55,118	55,122
$d_{st,12}^0$	54,991	54,994

Wartości kątów poziomych β^0 obliczone na podstawie współrzędnych przybliżonych przedstawia tabela 3.20.

Tabela 3.20. Kąty poziome obliczone ze współrzędnych przybliżonych (źródło: materiały własne)

	Pomiar pierwotny (<i>EP</i>) (16.01.2014)	Pomiar aktualny (<i>EA</i>) (30.06.2014)
	[g]	
$\beta_{31,st,2}^0$	84,8110	84,8119
$\beta_{2,st,29}^0$	47,9407	47,9335
$\beta_{29,st,30}^0$	30,9435	30,9427
$\beta_{31,st,4}^0$	56,2918	56,2769
$\beta_{4,st,29}^0$	76,4599	76,4685
$\beta_{31,st,7}^0$	59,4402	59,4032
$\beta_{7,st,29}^0$	73,3115	73,3422
$\beta_{31,st,12}^0$	85,8340	85,8285
$\beta_{12,st,29}^0$	46,9177	46,9169

W tabeli 3.21. zamieszczono wartości kątów pionowych α^0 obliczone na podstawie współrzędnych przybliżonych:

Tabela 3.21. Kąty pionowe obliczone ze współrzędnych przybliżonych (źródło: materiały własne)

	Pomiar pierwotny (<i>EP</i>) (16.01.2014)	Pomiar aktualny (<i>EA</i>) (30.06.2014)
	[g]	
$\alpha_{st,31}^0$	-14,6692	-14,7075
$\alpha_{st,29}^0$	-4,5721	-4,5818
$\alpha_{st,30}^0$	-7,2487	-7,2561
$\alpha_{st,2}^0$	3,1935	3,2080
$\alpha_{st,4}^0$	-4,0242	-3,9529
$\alpha_{st,7}^0$	-2,4731	-2,3478
$\alpha_{st,12}^0$	-4,3262	-4,3428

Dla pomiaru pierwotnego (16.01.2014) macierze znanych współczynników $\mathbf{A}_{(EP)}$ przyjęły wartości:

$$\mathbf{A}_{d'(st)} = \begin{bmatrix} 0,6585 & 0,7171 & 0,2284 \\ -0,5552 & 0,8302 & -0,0501 \\ -0,1407 & 0,9880 & 0,0632 \\ -0,1896 & 0,9811 & 0,0388 \\ -0,5678 & 0,8203 & 0,0679 \\ -0,9715 & 0,2258 & 0,0717 \\ -0,9607 & -0,2532 & 0,1135 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{d'(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0,5552 & -0,8302 & 0,0501 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{d'(4)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0,1407 & -0,9880 & -0,0632 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{d'(7)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0,1896 & -0,9811 & -0,0388 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{d'(12)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0,5678 & -0,8203 & -0,0679 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_{\beta(st)} &= \begin{bmatrix} 2498,9240 & -27460,2687 & 0 \\ -4671,8600 & -20134,9355 & 0 \\ -5132,4717 & -21395,0951 & 0 \\ 8837,9004 & -23445,3752 & 0 \\ 14096,3065 & 3024,1450 & 0 \\ 21267,0904 & -4301,1881 & 0 \\ 21727,7021 & -3041,0285 & 0 \\ 7757,3300 & -990,7484 & 0 \\ 3622,9471 & 517,1220 & 0 \end{bmatrix} \\
\mathbf{A}_{\beta(2)} &= \begin{bmatrix} 15857,8828 & 10603,6584 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -15857,8828 & -10603,6584 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\mathbf{A}_{\beta(4)} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 23028,6667 & 3278,3252 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -23028,6667 & -3278,3252 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\mathbf{A}_{\beta(7)} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 23489,2785 & 4538,4849 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -23489,2785 & -4538,4849 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\mathbf{A}_{\beta(12)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9518,9063 & 4538,4849 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -9518,9063 & -6588,7650 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{\alpha(st)} = \begin{bmatrix} 3748,1188 & 4081,6920 & -23622,2457 \\ 531,1188 & -794,1511 & -19028,4627 \\ -206,6779 & 1451,8131 & -23168,0240 \\ -176,1308 & 911,5788 & -23887,6276 \\ -446,3676 & 644,8751 & -11523,3821 \\ -542,0510 & 125,9796 & -7741,5240 \\ -796,6255 & -209,9594 & -7209,4258 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{\alpha(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -531,0235 & 794,1512 & 19028,4627 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{\alpha(4)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 206,6779 & -1451,8131 & 23168,0240 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{\alpha(7)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 176,1308 & -911,5788 & 2388,7628 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{\alpha(12)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 446,3676 & -644,8751 & 11523,3821 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Macierze znanych współczynników $\mathbf{A}_{(EA)}$ obliczone na podstawie obserwacji pomiaru aktualnego (30.06.2014) kształtują się następująco:

$$\mathbf{A}_{d'(st)} = \begin{bmatrix} 0,6583 & 0,7171 & 0,2290 \\ -0,5552 & 0,8302 & -0,0504 \\ -0,1405 & 0,9881 & 0,0621 \\ -0,1891 & 0,9813 & 0,0369 \\ -0,5678 & 0,8203 & 0,0682 \\ -0,9715 & 0,2258 & 0,0719 \\ -0,9607 & -0,2532 & 0,1137 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{d'(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0,5552 & -0,8302 & 0,0504 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{d'(4)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0,1405 & -0,9881 & -0,0621 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{d'(7)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0,1891 & -0,9813 & -0,0369 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{d'(12)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0,5678 & -0,8203 & -0,0682 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{\beta(st)} = \begin{bmatrix} 2506,1929 & -27458,0710 & 0 \\ -4663,6556 & -20129,5550 & 0 \\ -5118,4960 & -21379,7140 & 0 \\ 8840,5766 & -23443,8740 & 0 \\ 14091,1410 & 3023,3693 & 0 \\ 21260,9890 & -4305,1461 & 0 \\ 21715,8290 & -3054,9878 & 0 \\ 7756,7568 & -990,8278 & 0 \\ 3622,7731 & 517,0084 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{\beta(2)} = \begin{bmatrix} 15852,7110 & 10602,6480 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -15852,7110 & -10602,6480 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{\beta(4)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 23022,5590 & 3274,1325 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -23022,5590 & -3274,1325 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{\beta(7)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 23477,4000 & 4524,2907 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -23477,4000 & -4524,2907 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{\beta(12)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9518,3269 & 4524,2907 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -9518,3269 & -6588,4508 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{\alpha(st)} = \begin{bmatrix} 3756,9297 & 4092,0427 & -2361,6276 \\ 533,3756 & -797,4846 & -19023,1780 \\ -202,7753 & 1425,8455 & -23164,6680 \\ -166,7008 & 865,0418 & -23876,8560 \\ -448,0483 & 647,2949 & -11522,3200 \\ -543,4803 & 126,3153 & -7741,0802 \\ -797,8436 & -210,2651 & -7208,9727 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{\alpha(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -533,3756 & 797,4846 & 19023,1780 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}_{\alpha(4)} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 202,7753 & -1425,8455 & 23164,6680 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{A}_{\alpha(7)} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 166,7008 & -865,0418 & 23876,8560 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{A}_{\alpha(12)} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 448,2164 & -647,2949 & 11522,3200 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Korzystając z odległości przestrzennych, kątów poziomych oraz kątów pionowych określonych na podstawie obserwacji oraz współrzędnych przybliżonych punktów kontrolowanych, wyznaczono wektory wyrazów wolnych $\mathbf{L}_{(EP)}$ (pomiar pierwotny) i $\mathbf{L}_{(EA)}$ (pomiar aktualny):

$$\mathbf{L}_{(EP)} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{d'(EP)} \\ \mathbf{L}_{\beta'(EP)} \\ \mathbf{L}_{\alpha'(EP)} \end{bmatrix} \quad \mathbf{L}_{(EA)} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{d'(EA)} \\ \mathbf{L}_{\beta'(EA)} \\ \mathbf{L}_{\alpha'(EA)} \end{bmatrix}$$

gdzie:

$$\mathbf{L}_{d'(EP)} = \begin{bmatrix} 0,000 \\ 0,000 \\ 0,000 \\ 0,000 \\ 0,000 \\ -0,002 \\ -0,002 \end{bmatrix} [\text{m}] \quad \mathbf{L}_{d'(EA)} = \begin{bmatrix} 0,000 \\ 0,000 \\ 0,000 \\ 0,000 \\ 0,000 \\ -0,001 \\ -0,001 \end{bmatrix} [\text{m}]$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{L}_{\beta(EP)} &= \begin{bmatrix} -24 \\ -24 \\ -24 \\ -24 \\ -33 \\ -33 \\ -33 \\ -33 \\ -18 \end{bmatrix} \text{ [cc]} & \mathbf{L}_{\beta(EA)} &= \begin{bmatrix} -22 \\ -22 \\ -22 \\ -22 \\ -30 \\ -30 \\ -30 \\ -30 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ [cc]} \\
 \mathbf{L}_{\alpha(EP)} &= \begin{bmatrix} -117,9 \\ 0,0 \\ 0,0 \\ 0,0 \\ 0,0 \\ 36,3 \\ 53,9 \end{bmatrix} \text{ [cc]} & \mathbf{L}_{\alpha(EA)} &= \begin{bmatrix} -39 \\ 0,0 \\ 0,0 \\ 0,0 \\ 0,0 \\ 11 \\ 14 \end{bmatrix} \text{ [cc]}.
 \end{aligned}$$

Estymatory wektorów przyrostów $\hat{\mathbf{d}}_{\mathbf{x}(EP)}$ (z wyrównania pomiaru pierwotnego) oraz $\hat{\mathbf{d}}_{\mathbf{x}(EA)}$ (z wyrównania pomiaru aktualnego):

$$\hat{\mathbf{d}}_{\mathbf{x}(EP)} = \begin{bmatrix} +0,008 \\ +0,003 \\ -0,002 \\ +0,005 \\ +0,001 \\ -0,002 \\ +0,005 \\ +0,003 \\ -0,002 \\ +0,005 \\ +0,003 \\ -0,002 \\ +0,003 \\ 0,000 \\ -0,002 \end{bmatrix} \text{ [m]} \quad \hat{\mathbf{d}}_{\mathbf{x}(EA)} = \begin{bmatrix} +0,002 \\ 0,000 \\ 0,000 \\ 0,000 \\ -0,001 \\ -0,001 \\ +0,001 \\ -0,001 \\ -0,001 \\ +0,001 \\ -0,001 \\ -0,001 \\ -0,001 \\ -0,002 \\ -0,001 \end{bmatrix} \text{ [m]}$$

3.4. Wyznaczenie przemieszczeń poziomych i pionowych wybranych punktów kontrolowanych (z oceną ich istotności) z wykorzystaniem metody Hendersona wyznaczania lokalnych współczynników wariancji

W tabelach 3.22. i 3.23. zestawiono wartości współczynników wariancji obliczone w kolejnych iteracjach (dla pomiaru pierwotnego oraz pomiaru aktualnego). Procedurę iteracyjną wyrównania obserwacji zakończono na 5. iteracji (w 5. iteracji spełniony został warunek 2.13).

Tabela 3.22. Wartości lokalnych współczynników wariancji m_{0i}^2 uzyskanych w kolejnych iteracjach (pomiar pierwotny – 16.01.2014; źródło: opracowanie własne)

Nr iteracji	m_{0d}^2	$m_{0\beta}^2$	$m_{0\alpha}^2$	m_0^2
1	86,08	9,87	462,82	126,62
2	0,28	0,28	1,01	0,48
3	1,06	1,08	1,06	1,01
4	1,01	1,01	1,02	0,99
5	1,00	1,00	1,00	1,00

Tabela 3.23. Wartości lokalnych współczynników wariancji m_{0i}^2 uzyskanych w kolejnych iteracjach (pomiar aktualny – 30.06.2014; źródło: opracowanie własne)

Nr iteracji	m_{0d}^2	$m_{0\beta}^2$	$m_{0\alpha}^2$	m_0^2
1	6,99	0,04	31,36	15,17
2	0,82	0,02	1,11	0,68
3	1,02	0,00	1,00	0,76
4	1,00	0,53	1,00	0,88
5	1,00	1,00	1,00	1,00

Wektory wyrównanych współrzędnych punktów kontrolowanych pomiaru wyjściowego $\hat{\mathbf{X}}_{(EP)}$ oraz pomiaru aktualnego $\hat{\mathbf{X}}_{(EA)}$ przyjmują następujące wartości:

$$\hat{\mathbf{X}}_{(EP)} = \begin{bmatrix} \hat{X}_{st} \\ \hat{Y}_{st} \\ \hat{Z}_{st} \\ \hat{X}_2 \\ \hat{Y}_2 \\ \hat{Z}_2 \\ \hat{X}_4 \\ \hat{Y}_4 \\ \hat{Z}_2 \\ \hat{X}_7 \\ \hat{Y}_7 \\ \hat{Z}_2 \\ \hat{X}_{12} \\ \hat{Y}_{12} \\ \hat{Z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,006 \\ 0,002 \\ -0,011 \\ 18,553 \\ -27,741 \\ 1,664 \\ 3,861 \\ -27,094 \\ -1,743 \\ 5,052 \\ -26,126 \\ -1,045 \\ 31,289 \\ -45,199 \\ -3,754 \end{bmatrix} [\text{m}] \quad \hat{\mathbf{X}}_{(EA)} = \begin{bmatrix} \hat{X}_{st} \\ \hat{Y}_{st} \\ \hat{Z}_{st} \\ \hat{X}_2 \\ \hat{Y}_2 \\ \hat{Z}_2 \\ \hat{X}_4 \\ \hat{Y}_4 \\ \hat{Z}_2 \\ \hat{X}_7 \\ \hat{Y}_7 \\ \hat{Z}_2 \\ \hat{X}_{12} \\ \hat{Y}_{12} \\ \hat{Z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,003 \\ 0,000 \\ 0,008 \\ 18,554 \\ -27,748 \\ 1,676 \\ 3,851 \\ -27,105 \\ -1,710 \\ 5,035 \\ -26,146 \\ -0,990 \\ 31,294 \\ -45,218 \\ -3,765 \end{bmatrix} [\text{m}]$$

W tabeli 3.24. przedstawiono błędy średnie wyróżnionych w wyrównaniu z wykorzystaniem lokalnych współczynników wariancji grup obserwacji, uwzględniające błędy przypadkowe pomiaru (dla pomiaru pierwotnego i aktualnego). Wyrównując te obserwacje z wykorzystaniem globalnego współczynnika wariancji przyjęto *a priori* wartości błędów średnich ze specyfikacji tachimetru, bez uwzględnienia błędów występujących w czasie wykonywania pomiaru.

Tabela 3.24. Błędy średnie wyróżnionych jednorodnych grup obserwacji (źródło: opracowanie własne)

	Pomiar pierwotny (EP) (16.01.2014)	Pomiar aktualny (EA) (30.06.2014)
$m_{d'}$	0,005 m	0,002 m
m_{β}	5,2 ^{cc}	0,0 ^{cc}
m_{α}	64,0 ^{cc}	17,6 ^{cc}

Macierze wag \mathbf{P} określone na podstawie iteracyjnej procedury metody Hendersona przyjęły postać:

$$\mathbf{P}_{d'(EP)} = \begin{bmatrix} 3,8023 \cdot 10^4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3,8023 \cdot 10^4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3,8023 \cdot 10^4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3,8023 \cdot 10^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3,8023 \cdot 10^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3,8023 \cdot 10^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3,8023 \cdot 10^4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_{\beta(EP)} = \begin{bmatrix} -0,0365 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,0365 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,0365 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,0365 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,0365 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,0365 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,0365 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,0365 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,0365 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_{\alpha(EP)} = \begin{bmatrix} 2,4550 \cdot 10^{-4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2,4550 \cdot 10^{-4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2,4550 \cdot 10^{-4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2,4550 \cdot 10^{-4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2,4550 \cdot 10^{-4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2,4550 \cdot 10^{-4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2,4550 \cdot 10^{-4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2,4550 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_{d'(EA)} = \begin{bmatrix} 5,2540 \cdot 10^5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5,2540 \cdot 10^5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5,2540 \cdot 10^5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5,2540 \cdot 10^5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5,2540 \cdot 10^5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5,2540 \cdot 10^5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5,2540 \cdot 10^5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_{\beta(EA)} = \begin{bmatrix} 0,0085 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0085 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,0085 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,0085 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0085 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0085 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0085 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0085 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_{\alpha(EA)} = \begin{bmatrix} 1,8720 \cdot 10^{-4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1,8720 \cdot 10^{-4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,8720 \cdot 10^{-4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,8720 \cdot 10^{-4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1,8720 \cdot 10^{-4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,8720 \cdot 10^{-4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,8720 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix}$$

gdzie:

$\mathbf{P}_{d'(EP)}$ – macierz wag odległości przestrzennych dla pomiaru pierwotnego (16.01.2014),

$\mathbf{P}_{\beta(EP)}$ – macierz wag kątów poziomych dla pomiaru pierwotnego (16.01.2014),

$\mathbf{P}_{\alpha'(EP)}$ – macierz wag kątów pionowych dla pomiaru pierwotnego (16.01.2014),

$\mathbf{P}_{d'(EA)}$ – macierz wag odległości przestrzennych dla pomiaru aktualnego (30.06.2014),

$\mathbf{P}_{\beta(EA)}$ – macierz wag kątów poziomych dla pomiaru aktualnego (30.06.2014),

$\mathbf{P}_{\alpha'(EA)}$ – macierz wag kątów pionowych dla pomiaru aktualnego (30.06.2014).

Wektory poprawek $\hat{\mathbf{V}}$ do wyników pomiaru obliczone w wyniku wyrównania z wykorzystaniem estymatorów lokalnych współczynników wariancji przyjmują następujące wartości:

$$\hat{\mathbf{V}}_{(EP)} = \begin{bmatrix} +0,0043\text{m} \\ 0,0000\text{m} \\ 0,0000\text{m} \\ 0,0000\text{m} \\ -0,0209\text{m} \\ -0,0071\text{m} \\ -0,0080\text{m} \\ +4,5\text{cc} \\ +4,5\text{cc} \\ +4,5\text{cc} \\ -12,9\text{cc} \\ +4,5\text{cc} \\ +4,5\text{cc} \\ +4,5\text{cc} \\ -11,6\text{cc} \\ +2,3\text{cc} \\ -39,2\text{cc} \\ 0,0\text{cc} \\ 0,0\text{cc} \\ 0,0\text{cc} \\ -19,0\text{cc} \\ +50,5\text{cc} \\ +65,1\text{cc} \end{bmatrix} \quad \hat{\mathbf{V}}_{(EA)} = \begin{bmatrix} -0,0028\text{m} \\ 0,0000\text{m} \\ 0,0000\text{m} \\ 0,0000\text{m} \\ -0,0037\text{m} \\ -0,0010\text{m} \\ +0,0008\text{m} \\ 0,0\text{cc} \\ 0,0\text{cc} \\ 0,0\text{cc} \\ 0,0\text{cc} \\ 0,0\text{cc} \\ 0,0\text{cc} \\ 0,0\text{cc} \\ 0,0\text{cc} \\ 0,0\text{cc} \\ +9,0\text{cc} \\ 0,0\text{cc} \\ 0,0\text{cc} \\ 0,0\text{cc} \\ +1,2\text{cc} \\ -15,5\text{cc} \\ -17,4\text{cc} \end{bmatrix}$$

Estymowane macierze kowariancji $\hat{\mathbf{C}}_{\hat{\mathbf{x}}}$ są równe:

$$\hat{\mathbf{C}}_{\hat{\mathbf{x}}_{st}(EP)} = \begin{bmatrix} -2,7989 \cdot 10^{-6} & 2,1955 \cdot 10^{-6} & -5,7486 \cdot 10^{-7} \\ -2,1955 \cdot 10^{-6} & -1,8785 \cdot 10^{-6} & -4,6757 \cdot 10^{-7} \\ -5,7486 \cdot 10^{-7} & -4,6757 \cdot 10^{-6} & 5,8635 \cdot 10^{-6} \end{bmatrix} \quad \hat{\mathbf{C}}_{\hat{\mathbf{x}}_{st}(EA)} = \begin{bmatrix} 2,8742 \cdot 10^{-13} & 1,9460 \cdot 10^{-13} & 5,9707 \cdot 10^{-14} \\ 1,9460 \cdot 10^{-13} & 1,3682 \cdot 10^{-13} & 4,1087 \cdot 10^{-14} \\ 5,9707 \cdot 10^{-14} & 4,1087 \cdot 10^{-14} & 4,6273 \cdot 10^{-7} \end{bmatrix}$$

$$\hat{C}_{\hat{X}_{2(EP)}} = \begin{bmatrix} 6,6300 \cdot 10^{-6} & -1,3392 \cdot 10^{-5} & 2,3429 \cdot 10^{-9} \\ -1,3392 \cdot 10^{-5} & 1,6936 \cdot 10^{-5} & -9,8998 \cdot 10^{-7} \\ 2,3429 \cdot 10^{-9} & -9,8998 \cdot 10^{-7} & 1,7123 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix} \quad \hat{C}_{\hat{X}_{2(EA)}} = \begin{bmatrix} 1,8088 \cdot 10^{-6} & -2,7045 \cdot 10^{-6} & -1,4001 \cdot 10^{-7} \\ -2,7045 \cdot 10^{-6} & 4,0436 \cdot 10^{-6} & 2,0934 \cdot 10^{-7} \\ -1,4001 \cdot 10^{-7} & 2,0934 \cdot 10^{-7} & 1,3343 \cdot 10^{-6} \end{bmatrix}$$

$$\hat{C}_{\hat{X}_{4(EP)}} = \begin{bmatrix} -9,8820 \cdot 10^{-7} & -5,2109 \cdot 10^{-6} & -5,8757 \cdot 10^{-7} \\ -5,2109 \cdot 10^{-6} & 2,3983 \cdot 10^{-5} & 7,2405 \cdot 10^{-7} \\ -5,8757 \cdot 10^{-7} & 7,2405 \cdot 10^{-7} & 1,3497 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix} \quad \hat{C}_{\hat{X}_{4(EA)}} = \begin{bmatrix} 1,1587 \cdot 10^{-7} & -8,1473 \cdot 10^{-7} & 4,6099 \cdot 10^{-8} \\ -8,1473 \cdot 10^{-7} & 5,7289 \cdot 10^{-6} & -3,2416 \cdot 10^{-7} \\ 4,6099 \cdot 10^{-8} & -3,2416 \cdot 10^{-7} & 1,0615 \cdot 10^{-6} \end{bmatrix}$$

$$\hat{C}_{\hat{X}_{7(EP)}} = \begin{bmatrix} -6,0149 \cdot 10^{-7} & -6,4406 \cdot 10^{-6} & -5,6770 \cdot 10^{-7} \\ -6,4406 \cdot 10^{-6} & 2,3651 \cdot 10^{-5} & 2,9161 \cdot 10^{-7} \\ -5,6770 \cdot 10^{-7} & 2,9161 \cdot 10^{-7} & 1,3020 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix} \quad \hat{C}_{\hat{X}_{7(EA)}} = \begin{bmatrix} 1,1587 \cdot 10^{-7} & -8,1473 \cdot 10^{-7} & 4,6099 \cdot 10^{-8} \\ -8,1473 \cdot 10^{-7} & 5,7289 \cdot 10^{-6} & -3,2416 \cdot 10^{-7} \\ 4,6099 \cdot 10^{-8} & -3,2416 \cdot 10^{-7} & 1,0615 \cdot 10^{-6} \end{bmatrix}$$

$$\hat{C}_{\hat{X}_{12(EP)}} = \begin{bmatrix} -1,3627 \cdot 10^{-4} & 2,0898 \cdot 10^{-4} & -5,2344 \cdot 10^{-5} \\ 2,0898 \cdot 10^{-4} & -3,2394 \cdot 10^{-4} & 7,5866 \cdot 10^{-5} \\ -5,2344 \cdot 10^{-5} & 7,5866 \cdot 10^{-5} & 3,6227 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix} \quad \hat{C}_{\hat{X}_{12(EA)}} = \begin{bmatrix} 1,2340 \cdot 10^{-12} & -1,7230 \cdot 10^{-12} & 1,3696 \cdot 10^{-13} \\ -1,7230 \cdot 10^{-12} & 2,8400 \cdot 10^{-12} & -1,4437 \cdot 10^{-13} \\ 1,3696 \cdot 10^{-13} & -1,4437 \cdot 10^{-13} & 2,8053 \cdot 10^{-6} \end{bmatrix}$$

Obliczone na podstawie estymowanych macierzy kowariancji $\hat{C}_{\hat{X}}$ błędy położenia punktów obliczone ze wzoru (3.1) zestawionow tabeli 3.25.

Tabela 3.25. Błędy położenia punktów – wyrównanie z wykorzystaniem lokalnych współczynników wariancji (źródło: opracowanie własne)

	Pomiar pierwotny (EP) (0. epoka pomiarowa – 16.01.2014)	Pomiar aktualny (EA) (1. epoka pomiarowa – 30.06.2014)
m_{st}	0,002 m	0,001 m
m_2	0,004 m	0,003 m
m_4	0,005 m	0,003 m
m_7	0,005 m	0,003 m
m_{12}	0,001 m	0,002 m

Współrzędne analizowanych punktów, wyrównane z wykorzystaniem lokalnych współczynników wariancji, oraz przemieszczenia obliczone na ich podstawie przedstawiono w tabeli 3.26.

Tabela 3.26. Współrzędne stanowiska tachimetru i punktów kontrolowanych oraz ich przemieszczenia – wyrównanie z wykorzystaniem lokalnych współczynników wariancji (źródło: opracowanie własne)

Punkt	Pomiar pierwotny (16.01.2014)			Pomiar aktualny (30.01.2014)			$\Delta\hat{X}$ [m]	$\Delta\hat{Y}$ [m]	$\Delta\hat{Z}$ [m]
	$\hat{X}_{(EP)}$ [m]	$\hat{Y}_{(EP)}$ [m]	$\hat{Z}_{(EP)}$ [m]	$\hat{X}_{(EA)}$ [m]	$\hat{Y}_{(EA)}$ [m]	$\hat{Z}_{(EA)}$ [m]			
st	0,006	0,002	-0,011	-0,003	0,000	0,008	-0,009	-0,002	0,011
2	18,553	-27,741	1,664	18,554	-27,748	1,676	0,001	-0,007	0,002
4	3,861	-27,094	-1,743	3,851	-27,105	-1,710	-0,010	-0,011	0,033
7	5,052	-26,126	-1,045	5,035	-26,146	-0,990	-0,017	-0,020	0,055
12	31,288	-45,199	-3,754	31,294	-45,218	-3,765	0,006	-0,019	-0,011

Kryterium istotności wyznaczonych przemieszczeń pionowych analizowanych punktów oraz ich istotność zestawiono w tabeli 3.27.

Tabela 3.27. Istotność wyznaczonych przemieszczeń pionowych – wyrównanie z wykorzystaniem lokalnych współczynników wariancji (źródło: opracowanie własne)

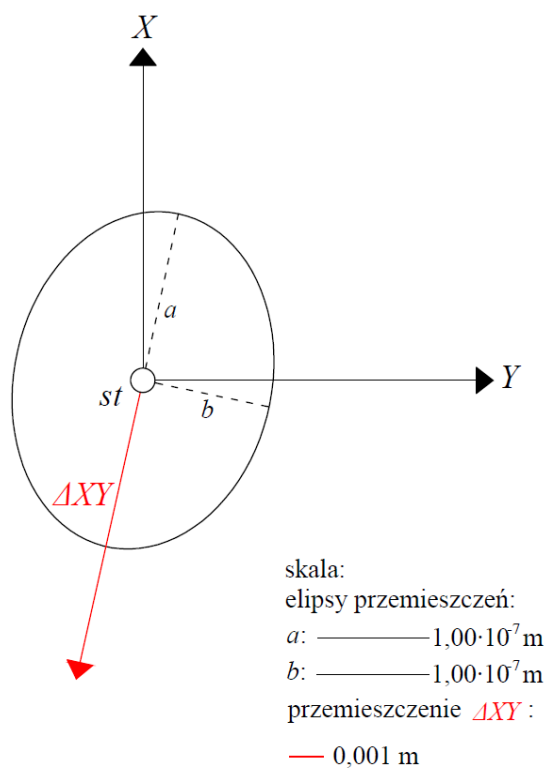
Punkt	$\Delta\hat{Z}$ [m]	$m_{\Delta\hat{Z}}$ [m]	$2m_{\Delta\hat{Z}}$ [m]	Istotność przemieszczenia
st	+0,011	0,003	0,006	ISTOTNE
2	+0,002	0,005	0,010	NIEISTOTNE
4	+0,033	0,004	0,008	ISTOTNE
7	+0,055	0,004	0,008	ISTOTNE
12	-0,011	0,007	0,014	NIEISTOTNE

Parametry elips granicznych przemieszczeń punktów kontrolowanych obliczone dla wyrównania z wykorzystaniem lokalnych współczynników wariancji przedstawiono w tabeli 3.28.

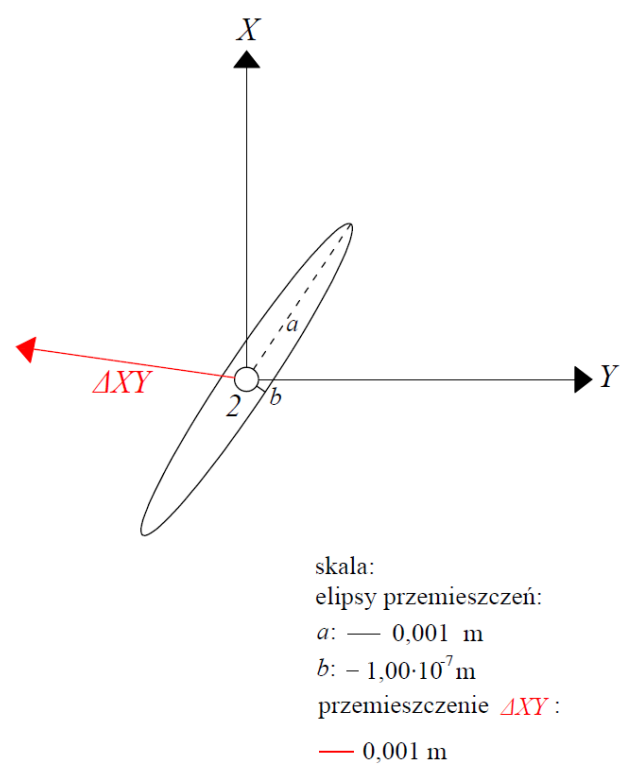
Tabela 3.28. Parametry elips granicznych przemieszczeń punktów – wyrównanie z wykorzystaniem lokalnych współczynników wariancji (źródło: opracowanie własne)

Punkt	PÓŁOSIE ELIPSY GRANICZNEJ		Kąt skręcenia φ [g]
	a [m]	b [m]	
st	$1,54 \cdot 10^{-7}$	$1,16 \cdot 10^{-7}$	13,2591
2	0,0057	$2,04 \cdot 10^{-7}$	37,5283
4	0,0056	$1,68 \cdot 10^{-7}$	8,9933
7	0,0057	$1,62 \cdot 10^{-7}$	12,1196
12	$4,37 \cdot 10^{-6}$	$3,53 \cdot 10^{-7}$	33,8824

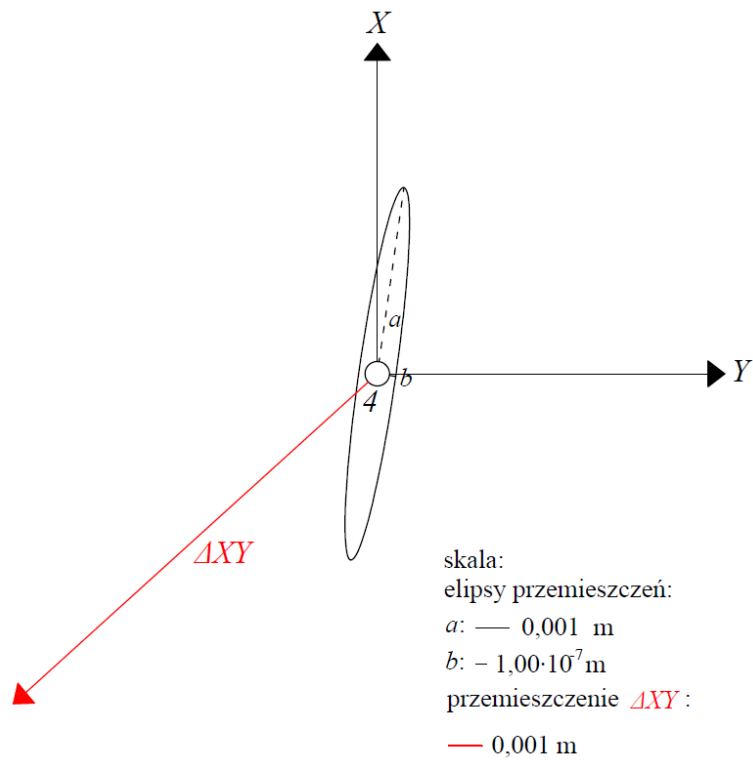
Wektory przemieszczeń poziomych badanych punktów wraz z ich elipsami granicznymi przedstawiono na rysunkach 3.15. – 3.19.



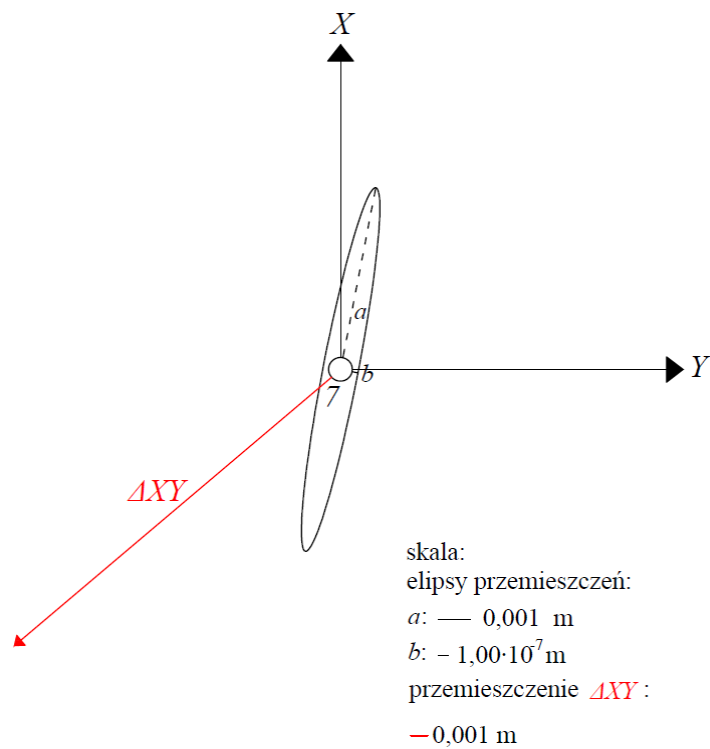
Rys. 3.15. Przesunięcie poziome stanowiska tachimetru oraz elipsa błędów tego przesunięcia – wyrównanie z wykorzystaniem lokalnych współczynników wariancji (źródło: opracowanie własne)



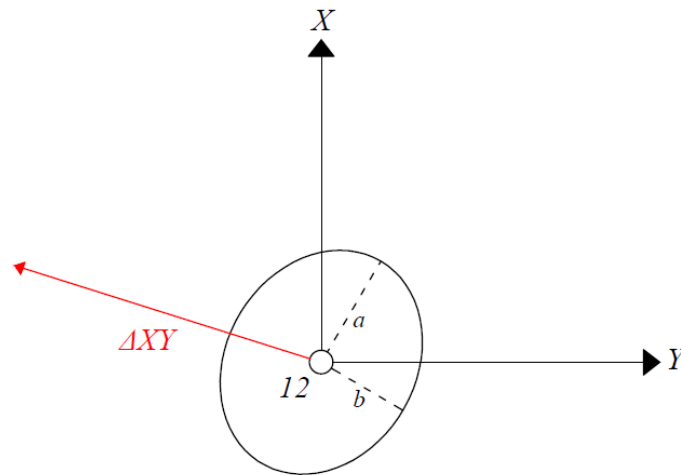
Rys. 3.16. Przesunięcie poziome punktu kontrolowanego nr 2 oraz elipsa błędów tego przesunięcia – wyrównanie z wykorzystaniem lokalnych współczynników wariancji (źródło: opracowanie własne)



Rys. 3.17. Przeszyczenie poziome punktu kontrolowanego nr 4 oraz elipsa błędu tego przeszczenia – wyrównanie z wykorzystaniem lokalnych współczynnikiw wariancji (źródło: opracowanie własne)



Rys. 3.18. Przeszyczenie poziome punktu kontrolowanego nr 7 oraz elipsa błędu tego przeszczenia – wyrównanie z wykorzystaniem lokalnych współczynnikiw wariancji (źródło: opracowanie własne)



skala:
 elipsy przemieszczeń:
 $a: -1,00 \cdot 10^6 \text{ m}$
 $b: -1,00 \cdot 10^7 \text{ m}$
 przemieszczenie ΔXY :
 $-0,001 \text{ m}$

Rys. 3.19. Przesunięcie poziome punktu kontrolowanego nr 12 oraz elipsa błędu tego przesunięcia – wyrównanie z wykorzystaniem lokalnych współczynników wariancji (źródło: opracowanie własne)

Zestawienie przemieszczeń uzyskanych na podstawie wyrównania z wykorzystaniem lokalnych współczynników wariancji oraz ich istotność zestawiono w tabeli 3.29.

Tabela 3.29. Przesunięcia punktów z oceną ich istotności – wyrównanie z wykorzystaniem lokalnych współczynników wariancji (źródło: opracowanie własne)

Punkt	PRZEMIESZCZENIA POZIOME		PRZEMIESZCZENIA PIONOWE	
	ΔXY [m]	ISTOTNOŚĆ	ΔZ [m]	ISTOTNOŚĆ
<i>st</i>	0,008	ISTOTNE	+0,011	ISTOTNE
2	0,006	ISTOTNE	+0,002	NIEISTOTNE
4	0,014	ISTOTNE	+0,033	ISTOTNE
7	0,026	ISTOTNE	+0,055	ISTOTNE
12	0,005	ISTOTNE	-0,011	NIEISTOTNE

3.4.1. Obliczenia – metoda Hendersona

W tabeli 3.30. zestawiono wartości błędów średnich wyróżnionych jednorodnych grup pomiarów w kolejnych iteracjach procesu wyrównania z wykorzystaniem lokalnych współczynników wariancji w dwóch epokach pomiarowych.

Tabela 3.30. Wartości błędów średnich wyróżnionych jednorodnych grup pomiaru w kolejnych iteracjach wyrównania z wykorzystaniem lokalnych współczynników wariancji (źródło: opracowanie własne)

Iteracja	Pomiar pierwotny (EP) (16.01.2014)			Pomiar aktualny (EA) (30.06.2014)		
	m_d [m]	m_β [cc]	m_α [cc]	m_d [m]	m_β [cc]	m_α [cc]
1	0,009	9,4	64,5	0,003	0,6	16,8
2	0,005	5,0	64,8	0,000	0,1	17,7
3	0,000	5,2	63,3	0,002	0,0	17,6
4	0,005	5,2	63,8	0,002	0,0	17,6
5	0,005	5,2	64,0	0,002	0,0	17,6

Do wyrównania obserwacji, na podstawie których wyznaczono przemieszczenia oraz oceniono ich istotność, wybrano wartości błędów średnich uzyskane w 5. iteracji. Poniżej przedstawiono wyniki obliczeń ostatniej (wynikowej) iteracji.

Estymatory wektorów przyrostów $\hat{\mathbf{d}}_{\mathbf{x}(EP)}$ (dla pomiaru pierwotnego) oraz $\hat{\mathbf{d}}_{\mathbf{x}(EA)}$ (dla pomiaru aktualnego):

$$\hat{\mathbf{d}}_{\mathbf{x}(EP)} = \begin{bmatrix} +0,006 \\ +0,001 \\ -0,002 \\ +0,003 \\ 0,000 \\ -0,002 \\ +0,003 \\ +0,001 \\ -0,002 \\ +0,003 \\ +0,001 \\ -0,002 \\ -0,009 \\ +0,016 \\ -0,002 \end{bmatrix} \text{ [m]} \quad \hat{\mathbf{d}}_{\mathbf{x}(EA)} = \begin{bmatrix} -0,001 \\ -0,003 \\ +0,001 \\ -0,001 \\ -0,003 \\ +0,001 \\ -0,001 \\ -0,003 \\ +0,001 \\ -0,001 \\ -0,003 \\ +0,001 \\ -0,004 \\ 0,000 \\ 0,000 \end{bmatrix} \text{ [m]}$$

Macierz $\mathbf{N}_{(EP)}$ (dla pomiaru pierwotnego) można wyrazić następująco:

$$\mathbf{N}_{(EP)} = [\mathbf{N}_{1(EP)} | \mathbf{N}_{2(EP)} | \mathbf{N}_{3(EP)} | \mathbf{N}_{4(EP)} | \mathbf{N}_{5(EP)}],$$

przy czym:

$$\mathbf{N} = \mathbf{Q}_X^{-1} \tag{3.3}$$

oraz:

$$\mathbf{N}_{1(EP)} = \begin{bmatrix} -4,8344 \cdot 10^7 & 7,0014 \cdot 10^6 & -2,0408 \cdot 10^4 \\ 7,0014 \cdot 10^6 & -8,0258 \cdot 10^7 & -2,5149 \cdot 10^4 \\ -2,0408 \cdot 10^4 & -2,5149 \cdot 10^4 & 5,6096 \cdot 10^5 \\ 6,6949 \cdot 10^6 & 1,7647 \cdot 10^7 & 1422,2095 \\ 4,5022 \cdot 10^6 & 1,1762 \cdot 10^7 & -2126,9293 \\ 1422,2095 & -2126,9293 & -8,8986 \cdot 10^4 \\ 2,1783 \cdot 10^7 & 1,3302 \cdot 10^7 & -837,6760 \\ 3,1064 \cdot 10^6 & 1,8553 \cdot 10^6 & 5884,2731 \\ -837,6760 & 5884,2731 & -1,3192 \cdot 10^5 \\ 2,3007 \cdot 10^7 & 1,5729 \cdot 10^7 & -752,9600 \\ 4,4526 \cdot 10^6 & 3,0009 \cdot 10^6 & 3897,0028 \\ -752,9600 & 3897,0028 & -1,4014 \cdot 10^5 \\ -3,8740 \cdot 10^5 & 7,8124 \cdot 10^6 & 203,3057 \\ 4,1894 \cdot 10^5 & 3,6166 \cdot 10^6 & -293,7194 \\ 203,3057 & -293,7194 & -3,2774 \cdot 10^4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N}_{2(EP)} = \begin{bmatrix} 6,6949 \cdot 10^6 & 4,5022 \cdot 10^6 & 1422,2095 \\ 1,7647 \cdot 10^7 & 1,1762 \cdot 10^7 & -2126,9293 \\ 1422,2095 & -2126,9293 & -8,8986 \cdot 10^4 \\ -1,8329 \cdot 10^7 & -1,2282 \cdot 10^7 & -1422,2095 \\ -1,2282 \cdot 10^7 & -8,1742 \cdot 10^6 & 2126,9293 \\ -1422,2095 & 2126,9293 & 8,8986 \cdot 10^4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N}_{3(EP)} = \begin{bmatrix}
 2,1783 \cdot 10^7 & 3,1064 \cdot 10^6 & -837,6760 \\
 1,3302 \cdot 10^7 & 1,8553 \cdot 10^6 & 5884,2731 \\
 -837,6760 & 5884,2731 & -1,3192 \cdot 10^5 \\
 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 \\
 -3,8678 \cdot 10^7 & -5,5116 \cdot 10^6 & 837,6760 \\
 -5,5116 \cdot 10^6 & -7,4622 \cdot 10^5 & -5884,2731 \\
 837,6760 & -5884,2731 & 1,3192 \cdot 10^5 \\
 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N}_{4(EP)} = \begin{bmatrix}
 2,3007 \cdot 10^7 & 4,4526 \cdot 10^6 & -752,9600 \\
 1,5729 \cdot 10^7 & 3,0009 \cdot 10^6 & 3897,0028 \\
 -752,9600 & 3897,0028 & -1,4014 \cdot 10^5 \\
 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 \\
 -4,0240 \cdot 10^7 & -7,7823 \cdot 10^6 & 752,9600 \\
 -7,7823 \cdot 10^6 & -1,4655 \cdot 10^6 & -3897,0028 \\
 752,9600 & -3897,0028 & 1,4014 \cdot 10^5 \\
 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N}_{5(EP)} = \begin{bmatrix} -3,8740 \cdot 10^5 & 4,1894 \cdot 10^5 & 203,3057 \\ 7,8124 \cdot 10^6 & 3,6166 \cdot 10^6 & -293,7194 \\ 203,3057 & -293,7194 & -3,2774 \cdot 10^4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -6,5962 \cdot 10^6 & -3,8804 \cdot 10^6 & -203,3057 \\ -3,8804 \cdot 10^6 & -2,3086 \cdot 10^6 & 293,7194 \\ -203,3057 & 293,7194 & 3,2774 \cdot 10^4 \end{bmatrix}$$

zaś macierz $\mathbf{N}_{(EA)}$ dla pomiaru aktualnego jako:

$$\mathbf{N}_{(EA)} = [\mathbf{N}_{1(EA)} | \mathbf{N}_{2(EA)} | \mathbf{N}_{3(EA)} | \mathbf{N}_{4(EA)} | \mathbf{N}_{5(EA)}]$$

gdzie:

$$\mathbf{N}_{1(EA)} = \begin{bmatrix} 2,9261 \cdot 10^{14} & -4,2746 \cdot 10^{13} & -2,6497 \cdot 10^5 \\ -4,2746 \cdot 10^{13} & 4,8572 \cdot 10^{14} & -1,546 \cdot 10^5 \\ -2,6497 \cdot 10^5 & -1,5406 \cdot 10^5 & 7,3025 \cdot 10^6 \\ -4,0472 \cdot 10^{13} & -1,0649 \cdot 10^{14} & -2,7795 \cdot 10^4 \\ -2,7068 \cdot 10^{13} & -7,1221 \cdot 10^{13} & 4,1559 \cdot 10^4 \\ -2,7795 \cdot 10^4 & 4,1559 \cdot 10^4 & -1,1618 \cdot 10^6 \\ -1,3150 \cdot 10^{14} & -8,0285 \cdot 10^{13} & 1,3588 \cdot 10^4 \\ -1,8701 \cdot 10^{13} & -1,1418 \cdot 10^{13} & -9,5548 \cdot 10^4 \\ 1,3588 \cdot 10^4 & -9,5548 \cdot 10^4 & -1,7228 \cdot 10^6 \\ -1,3883 \cdot 10^{14} & -9,4808 \cdot 10^{13} & 1,1585 \cdot 10^4 \\ -2,6755 \cdot 10^{13} & -1,8270 \cdot 10^{13} & -6,0119 \cdot 10^4 \\ 1,1585 \cdot 10^4 & -6,0119 \cdot 10^4 & -1,8299 \cdot 10^6 \\ 2,2734 \cdot 10^{12} & -4,7097 \cdot 10^{13} & 9969,3338 \\ -2,4478 \cdot 10^{12} & -2,1936 \cdot 10^{13} & -1,4403 \cdot 10^4 \\ 9969,3338 & -1,4403 \cdot 10^4 & -4,2688 \cdot 10^5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N}_{2(EA)} = \begin{bmatrix}
 -4,0472 \cdot 10^{13} & -2,7068 \cdot 10^{13} & -2,7795 \cdot 10^4 \\
 -1,0649 \cdot 10^{14} & -7,1221 \cdot 10^{13} & 4,1559 \cdot 10^4 \\
 -2,7795 \cdot 10^4 & 4,1559 \cdot 10^4 & -1,1618 \cdot 10^6 \\
 1,1076 \cdot 10^{14} & 7,4080 \cdot 10^{13} & 2,7795 \cdot 10^4 \\
 7,4080 \cdot 10^{13} & 4,9547 \cdot 10^{13} & -4,1559 \cdot 10^4 \\
 2,7795 \cdot 10^4 & -4,1559 \cdot 10^4 & 1,1618 \cdot 10^6 \\
 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 \\
 \mathbf{N}_{3(EA)} = \begin{bmatrix}
 -1,3150 \cdot 10^{14} & -1,8701 \cdot 10^{13} & 1,3588 \cdot 10^4 \\
 -8,0285 \cdot 10^{13} & -1,1418 \cdot 10^{13} & -9,5548 \cdot 10^4 \\
 1,3588 \cdot 10^4 & -9,5548 \cdot 10^4 & -1,7228 \cdot 10^6 \\
 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 \\
 2,3361 \cdot 10^{14} & 3,3223 \cdot 10^{13} & -1,3588 \cdot 10^4 \\
 3,3223 \cdot 10^{13} & 4,7247 \cdot 10^{12} & 9,5548 \cdot 10^4 \\
 -1,3588 \cdot 10^4 & 9,5548 \cdot 10^4 & 1,7228 \cdot 10^6 \\
 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N}_{4(EA)} = \begin{bmatrix} -1,3883 \cdot 10^{14} & -2,6755 \cdot 10^{13} & 1,1585 \cdot 10^4 \\ -9,4808 \cdot 10^{13} & -1,8270 \cdot 10^{13} & -6,0119 \cdot 10^4 \\ 1,1585 \cdot 10^4 & -6,0119 \cdot 10^4 & -1,8299 \cdot 10^6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2,4293 \cdot 10^{14} & 4,6815 \cdot 10^{13} & -1,1585 \cdot 10^4 \\ 4,6815 \cdot 10^{13} & 9,0217 \cdot 10^{12} & 6,0119 \cdot 10^4 \\ -1,1585 \cdot 10^4 & 6,0119 \cdot 10^4 & 1,8299 \cdot 10^6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N}_{5(EA)} = \begin{bmatrix} 2,2755 \cdot 10^{12} & -2,4478 \cdot 10^{12} & 9969,3338 \\ -4,7097 \cdot 10^{13} & -2,1936 \cdot 10^{13} & -1,4403 \cdot 10^4 \\ 9969,3338 & -1,4403 \cdot 10^4 & -4,2688 \cdot 10^5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3,9931 \cdot 10^{13} & 2,3310 \cdot 10^{13} & -9969,3338 \\ 2,3310 \cdot 10^{13} & 1,4077 \cdot 10^{13} & 1,4403 \cdot 10^4 \\ -9969,3338 & 1,4403 \cdot 10^4 & 4,2688 \cdot 10^5 \end{bmatrix}$$

Macierze \mathbf{N}_d :

$$\mathbf{N}_{d'(EP)} = [\mathbf{N}_{d'1(EP)} | \mathbf{N}_{d'2(EP)} | \mathbf{N}_{d'3(EP)} | \mathbf{N}_{d'4(EP)} | \mathbf{N}_{d'5(EP)}]$$

$$\mathbf{N}_{d'(EA)} = [\mathbf{N}_{d'1(EA)} | \mathbf{N}_{d'2(EA)} | \mathbf{N}_{d'3(EA)} | \mathbf{N}_{d'4(EA)} | \mathbf{N}_{d'5(EA)}]$$

gdzie:

$\mathbf{N}_{d'(EP)}$ – macierz \mathbf{N} dla odległości przestrzennych w pomiarze pierwotnym,

$\mathbf{N}_{d'(EA)}$ – macierz \mathbf{N} dla odległości przestrzennych w pomiarze aktualnym,

$$\mathbf{N}_{d'1(EP)} = \begin{bmatrix}
1,1357 \cdot 10^5 & -2,8729 \cdot 10^4 & -2102,9617 \\
-2,8729 \cdot 10^4 & 1,4944 \cdot 10^5 & 1,0107 \cdot 10^4 \\
-2102,9617 & 1,0107 \cdot 10^4 & 3148,9188 \\
-1,1718 \cdot 10^4 & 1,7525 \cdot 10^4 & -1058,4329 \\
1,7525 \cdot 10^4 & -2,6209 \cdot 10^4 & 1582,8975 \\
-1058,4329 & 1582,8975 & -95,5996 \\
-752,2518 & 5284,2089 & 337,8431 \\
5284,2089 & -3,7119 \cdot 10^4 & -2373,1863 \\
337,8431 & -2373,1863 & -151,7284 \\
-1366,3302 & 7071,5471 & 279,9326 \\
7071,5471 & -3,6599 \cdot 10^4 & -1448,8126 \\
279,9326 & -1448,8126 & -57,3524 \\
-1,226 \cdot 10^4 & 1,7712 \cdot 10^4 & 1466,0613 \\
1,7712 \cdot 10^4 & -2,5588 \cdot 10^4 & -2118,045 \\
1466,0613 & -2118,045 & -175,3198 \\
-1,1718 \cdot 10^4 & 1,7525 \cdot 10^4 & -1058,4329 \\
1,7525 \cdot 10^4 & -2,6209 \cdot 10^4 & 1582,8975 \\
-1058,4329 & 1582,8975 & -95,5996 \\
1,1718 \cdot 10^4 & -1,7525 \cdot 10^4 & 1058,4329 \\
-1,7525 \cdot 10^4 & 2,6209 \cdot 10^4 & -1582,8975 \\
1058,4329 & -1582,8975 & 95,5996 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0
\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N}_{d'2(EP)} = \begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0
\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N}_{d^3(EP)} = \begin{bmatrix}
 -752,2518 & 5284,2089 & 337,8431 \\
 5284,2089 & -3,7119 \cdot 10^4 & -2373,1863 \\
 337,8431 & -2373,1863 & -151,7284 \\
 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 \\
 752,2518 & -5284,2089 & -337,8431 \\
 -5284,2089 & 3,7119 \cdot 10^4 & 2373,1863 \\
 -337,8431 & 2373,1863 & 151,7284 \\
 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N}_{d^4(EP)} = \begin{bmatrix}
 -1366,3302 & 7071,5471 & 279,9326 \\
 7071,5471 & -3,6599 \cdot 10^4 & -1448,8126 \\
 279,9326 & -1448,8126 & -57,3524 \\
 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 \\
 1366,3302 & -7071,5471 & -279,9326 \\
 -7071,5471 & 3,6599 \cdot 10^4 & 1448,8126 \\
 -279,9326 & 1448,8126 & 57,3524 \\
 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N}_{d^5(EP)} = \begin{bmatrix}
-1,2260 \cdot 10^4 & 1,7712 \cdot 10^4 & 1466,0613 \\
1,7712 \cdot 10^4 & -2,5588 \cdot 10^4 & -2118,045 \\
1466,0613 & -2118,0450 & -175,3198 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
1,2260 \cdot 10^4 & -1,7712 \cdot 10^4 & -1466,0613 \\
-1,7712 \cdot 10^4 & 2,5588 \cdot 10^4 & 2118,045 \\
-1466,0613 & 2118,0450 & 175,3198 \\
5,0919 \cdot 10^5 & -1,2877 \cdot 10^5 & -326,3268 \\
-1,2877 \cdot 10^5 & 6,7018 \cdot 10^5 & 6825,8014 \\
-326,3268 & 6825,8014 & 1,4138 \cdot 10^4 \\
-5,2563 \cdot 10^4 & 7,8590 \cdot 10^4 & 4768,3828 \\
7,8590 \cdot 10^4 & -1,1750 \cdot 10^5 & -7129,5202 \\
4768,3828 & -7129,5202 & -432,5787 \\
-3367,6866 & 2,3675 \cdot 10^4 & -1486,7498 \\
2,3680 \cdot 10^4 & -1,6648 \cdot 10^5 & 1,0454 \cdot 10^4 \\
-1487,0696 & 1,0454 \cdot 10^4 & -656,5042 \\
-6096,7530 & 3,1637 \cdot 10^4 & -1188,7594 \\
3,1637 \cdot 10^4 & -1,6417 \cdot 10^5 & 6168,6973 \\
-1188,7594 & 6168,6973 & -231,7871 \\
-5,4972 \cdot 10^4 & 7,9418 \cdot 10^4 & -6599,1295 \\
7,9418 \cdot 10^4 & -1,1474 \cdot 10^5 & 9533,7545 \\
-6599,1295 & 9533,7545 & -792,1911
\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N}_{d'2(EA)} = \begin{bmatrix}
 -5,2563 \cdot 10^4 & 7,8590 \cdot 10^4 & 4768,3828 \\
 7,8590 \cdot 10^4 & -1,1750 \cdot 10^5 & -7129,5202 \\
 4768,3828 & -7129,5202 & -432,5787 \\
 5,2563 \cdot 10^4 & -7,8590 \cdot 10^4 & -4768,3828 \\
 -7,8590 \cdot 10^4 & 1,1750 \cdot 10^5 & 7129,5202 \\
 -4768,3828 & 7129,5202 & 432,5787 \\
 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N}_{d'3(EA)} = \begin{bmatrix}
 -3367,6866 & 2,3680 \cdot 10^4 & -1487,0696 \\
 2,3675 \cdot 10^4 & -1,6648 \cdot 10^5 & 1,0454 \cdot 10^4 \\
 -1486,7498 & 1,0454 \cdot 10^4 & -656,5042 \\
 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 \\
 3366,9622 & -2,3675 \cdot 10^4 & 1486,7498 \\
 -2,3675 \cdot 10^4 & 1,6648 \cdot 10^5 & -1,0454 \cdot 10^4 \\
 1486,7498 & -1,0454 \cdot 10^4 & 656,5042 \\
 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N}_{d'4(EA)} = \begin{bmatrix} -6096,7530 & 3,1637 \cdot 10^4 & -1188,7594 \\ 3,1637 \cdot 10^4 & -1,6417 \cdot 10^5 & 6168,6973 \\ -1188,7594 & 6168,6973 & -231,7871 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6096,7530 & -3,1637 \cdot 10^4 & 1188,7594 \\ -3,1637 \cdot 10^4 & 1,6417 \cdot 10^5 & -6168,6973 \\ 1188,7594 & -6168,6973 & 231,7871 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N}_{d'5(EA)} = \begin{bmatrix} -5,4972 \cdot 10^4 & 7,9418 \cdot 10^4 & -6599,1295 \\ 7,9418 \cdot 10^4 & -1,1474 \cdot 10^5 & 9533,7545 \\ -6599,1295 & 9533,7545 & -792,1911 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5,4972 \cdot 10^4 & -7,9418 \cdot 10^4 & 6599,1295 \\ -7,9418 \cdot 10^4 & 1,1474 \cdot 10^5 & -9533,7545 \\ 6599,1295 & -9533,7545 & 792,1911 \end{bmatrix}$$

Macierze \mathbf{N}_β :

$$\mathbf{N}_{\beta(EA)} = [\mathbf{N}_{\beta 1(EA)} | \mathbf{N}_{\beta 2(EA)} | \mathbf{N}_{\beta 3(EA)} | \mathbf{N}_{\beta 4(EA)} | \mathbf{N}_{\beta 5(EA)}]$$

$$\mathbf{N}_{\beta(EA)} = [\mathbf{N}_{\beta 1(EA)} | \mathbf{N}_{\beta 2(EA)} | \mathbf{N}_{\beta 3(EA)} | \mathbf{N}_{\beta 4(EA)} | \mathbf{N}_{\beta 5(EA)}]$$

gdzie:

$\mathbf{N}_{\beta(EA)}$ – macierz \mathbf{N} dla kątów poziomych w pomiarze pierwotnym,

$\mathbf{N}_{\beta(EA)}$ – macierz \mathbf{N} dla kątów poziomych w pomiarze aktualnym,

$$\mathbf{N}_{\beta_1(EP)} = \begin{bmatrix} -4,8462 \cdot 10^7 & 7,0266 \cdot 10^6 & 0 \\ 7,0266 \cdot 10^6 & -8,0412 \cdot 10^7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6,7067 \cdot 10^6 & 1,7629 \cdot 10^7 & 0 \\ 4,4845 \cdot 10^6 & 1,1788 \cdot 10^7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2,1783 \cdot 10^7 & 1,3297 \cdot 10^7 & 0 \\ 3,1010 \cdot 10^6 & 1,8929 \cdot 10^6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2,3008 \cdot 10^7 & 1,5722 \cdot 10^7 & 0 \\ 4,4455 \cdot 10^6 & 3,0377 \cdot 10^6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3,7510 \cdot 10^5 & 7,7946 \cdot 10^6 & 0 \\ 4,0116 \cdot 10^5 & 3,6423 \cdot 10^6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N}_{\beta_2(EP)} = \begin{bmatrix} 6,7067 \cdot 10^6 & 4,4845 \cdot 10^6 & 0 \\ 1,7629 \cdot 10^7 & 1,1788 \cdot 10^7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1,8341 \cdot 10^7 & -1,2264 \cdot 10^7 & 0 \\ -1,2264 \cdot 10^7 & -8,2006 \cdot 10^6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N}_{\beta 3(EP)} = \begin{bmatrix} 2,1783 \cdot 10^7 & 3,1010 \cdot 10^6 & 0 \\ 1,3297 \cdot 10^7 & 1,8929 \cdot 10^6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3,8678 \cdot 10^7 & -5,5062 \cdot 10^6 & 0 \\ -5,5062 \cdot 10^6 & -7,8386 \cdot 10^5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N}_{\beta 4(EP)} = \begin{bmatrix} 2,3008 \cdot 10^7 & 4,4455 \cdot 10^6 & 0 \\ 1,5722 \cdot 10^7 & 3,0377 \cdot 10^6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4,0241 \cdot 10^7 & -7,7752 \cdot 10^6 & 0 \\ -7,7752 \cdot 10^6 & -1,5023 \cdot 10^6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N}_{\beta 5(EP)} = \begin{bmatrix} -3,7510 \cdot 10^5 & 4,0116 \cdot 10^5 & 0 \\ 7,7946 \cdot 10^6 & 3,6423 \cdot 10^6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -6,6085 \cdot 10^6 & -3,8626 \cdot 10^6 & 0 \\ -3,8626 \cdot 10^6 & -2,3343 \cdot 10^6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N}_{\beta 1(EA)} = \begin{bmatrix} 2,9261 \cdot 10^{14} & -4,2746 \cdot 10^{13} & 0 \\ -4,2746 \cdot 10^{13} & 4,8572 \cdot 10^{14} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4,0472 \cdot 10^{13} & -1,0649 \cdot 10^{14} & 0 \\ -2,7068 \cdot 10^{13} & -7,1221 \cdot 10^{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1,3150 \cdot 10^{14} & -8,0285 \cdot 10^{13} & 0 \\ -1,8701 \cdot 10^{13} & -1,1418 \cdot 10^{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1,3883 \cdot 10^{14} & -9,4808 \cdot 10^{13} & 0 \\ -2,6755 \cdot 10^{13} & -1,8270 \cdot 10^{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2,2734 \cdot 10^{12} & -4,7097 \cdot 10^{13} & 0 \\ -2,4478 \cdot 10^{12} & -2,1936 \cdot 10^{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N}_{\beta 2(EA)} = \begin{bmatrix} -4,0472 \cdot 10^{13} & -2,7068 \cdot 10^{13} & 0 \\ -1,0649 \cdot 10^{13} & -7,1221 \cdot 10^{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1,1076 \cdot 10^{14} & 7,4080 \cdot 10^{13} & 0 \\ 7,4080 \cdot 10^{13} & 4,9547 \cdot 10^{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N}_{\beta 3(EA)} = \begin{bmatrix} -1,3150 \cdot 10^{14} & -1,8701 \cdot 10^{13} & 0 \\ -8,0285 \cdot 10^{13} & -1,1418 \cdot 10^{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2,3361 \cdot 10^{14} & 3,3223 \cdot 10^{13} & 0 \\ 3,3223 \cdot 10^{13} & 4,7247 \cdot 10^{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N}_{\beta 4(EA)} = \begin{bmatrix} -1,3883 \cdot 10^{14} & -2,6755 \cdot 10^{13} & 0 \\ -9,4808 \cdot 10^{13} & -1,8270 \cdot 10^{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2,4293 \cdot 10^{14} & 4,6815 \cdot 10^{13} & 0 \\ 4,6815 \cdot 10^{13} & 9,0217 \cdot 10^{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2,2734 \cdot 10^{12} & -2,4478 \cdot 10^{12} & 0 \\ -4,7097 \cdot 10^{13} & -2,1936 \cdot 10^{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3,9931 \cdot 10^{13} & 2,3310 \cdot 10^{13} & 0 \\ 2,3310 \cdot 10^{13} & 1,4077 \cdot 10^{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N}_{\beta 5(EA)} =$$

Macierze \mathbf{N}_α :

$$\mathbf{N}_{\alpha(EP)} = [\mathbf{N}_{\alpha 1(EP)} | \mathbf{N}_{\alpha 2(EP)} | \mathbf{N}_{\alpha 3(EP)} | \mathbf{N}_{\alpha 4(EP)} | \mathbf{N}_{\alpha 5(EP)}]$$

$$\mathbf{N}_{\alpha(EA)} = [\mathbf{N}_{\alpha 1(EA)} | \mathbf{N}_{\alpha 2(EA)} | \mathbf{N}_{\alpha 3(EA)} | \mathbf{N}_{\alpha 4(EA)} | \mathbf{N}_{\alpha 5(EA)}]$$

gdzie:

$\mathbf{N}_{\alpha(EP)}$ – macierz \mathbf{N} dla kątów pionowych w pomiarze pierwotnym,

$\mathbf{N}_{\alpha(EA)}$ – macierz \mathbf{N} dla kątów pionowych w pomiarze aktualnym,

$$\mathbf{N}_{\alpha 1(EP)} = \begin{bmatrix}
3813,0135 & 3492,8029 & -1,8305 \cdot 10^4 \\
3492,8029 & 5083,1300 & -3,5256 \cdot 10^4 \\
-1,8305 \cdot 10^4 & -3,5256 \cdot 10^4 & 5,5781 \cdot 10^5 \\
-69,2268 & 103,5294 & 2480,6424 \\
103,5294 & -154,8293 & -3709,8268 \\
2480,6424 & -3709,8268 & -8,8890 \cdot 10^4 \\
-10,4866 & 73,6633 & -1175,5191 \\
73,6633 & -517,4497 & 8257,4594 \\
-1175,5191 & 8257,4594 & -1,3177 \cdot 10^5 \\
-7,6158 & 39,4163 & -1032,8926 \\
39,4163 & -204,0023 & 5345,8154 \\
-1032,8926 & 5345,8154 & -1,4009 \cdot 10^5 \\
-48,9139 & 70,6667 & -1262,7556 \\
70,6667 & -102,0935 & 1824,3256 \\
-1262,7556 & 1824,3256 & -3,2599 \cdot 10^4 \\
-69,2268 & 103,5294 & 2480,6424 \\
103,5294 & -154,8293 & -3709,8268 \\
2480,6424 & -3709,8268 & -8,8890 \cdot 10^4 \\
69,2268 & -103,5294 & -2480,6424 \\
-103,5294 & 154,8293 & 3709,8268 \\
-2480,6424 & 3709,8268 & 8,8890 \cdot 10^4 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0
\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N}_{\alpha 2(EP)} = \begin{bmatrix}
-69,2268 & 103,5294 & 2480,6424 \\
103,5294 & -154,8293 & -3709,8268 \\
2480,6424 & -3709,8268 & -8,8890 \cdot 10^4 \\
69,2268 & -103,5294 & -2480,6424 \\
-103,5294 & 154,8293 & 3709,8268 \\
-2480,6424 & 3709,8268 & 8,8890 \cdot 10^4 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0
\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N}_{\alpha 3(EP)} = \begin{bmatrix} -10,4866 & 73,6633 & -1175,5191 \\ 73,6633 & -517,4497 & 8257,4594 \\ -1175,5191 & 8257,4594 & -1,3177 \cdot 10^5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 10,4866 & -73,6633 & 1175,8191 \\ -73,6633 & 517,4497 & -8257,4594 \\ 1175,5191 & -8257,4594 & 1,3177 \cdot 10^5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N}_{\alpha 4(EP)} = \begin{bmatrix} -7,6158 & 39,4163 & -1032,8926 \\ 39,4163 & -204,0023 & 5345,8154 \\ -1032,8926 & 5345,8154 & -1,4009 \cdot 10^5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 7,6158 & -39,4163 & 1032,8926 \\ -39,4163 & 204,0023 & -5345,8154 \\ 1032,8926 & -5345,8154 & 1,4009 \cdot 10^5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N}_{\alpha 5(EP)} = \begin{bmatrix} -48,9139 & 70,6667 & -1262,7556 \\ 70,6667 & -102,0935 & 1824,3256 \\ -1262,7556 & 1824,3256 & -3,2599 \cdot 10^4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 48,9139 & -70,6667 & 1262,7556 \\ -70,6667 & 102,0935 & -1824,3256 \\ 1262,7556 & -1824,3256 & 3,2599 \cdot 10^4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N}_{\alpha 1(EA)} = \begin{bmatrix} 5,0068 \cdot 10^4 & 4,5971 \cdot 10^4 & -2,6464 \cdot 10^5 \\ 4,5971 \cdot 10^4 & 6,6245 \cdot 10^4 & -1,6088 \cdot 10^5 \\ -2,6464 \cdot 10^5 & -1,6088 \cdot 10^5 & 7,2884 \cdot 10^6 \\ -913,0272 & 1365,1265 & -3,2564 \cdot 10^4 \\ 1365,1265 & -2041,0897 & 4,8688 \cdot 10^4 \\ -3,2564 \cdot 10^4 & 4,8688 \cdot 10^4 & -1,1614 \cdot 10^6 \\ -131,9616 & 927,9083 & 1,5075 \cdot 10^4 \\ 927,9083 & -6524,7276 & -1,0600 \cdot 10^5 \\ 1,5075 \cdot 10^4 & -1,0600 \cdot 10^5 & -1,7221 \cdot 10^6 \\ -89,1852 & 462,7988 & 1,2774 \cdot 10^4 \\ 462,7988 & -2401,5502 & -6,6288 \cdot 10^4 \\ 1,2774 \cdot 10^4 & -6,6288 \cdot 10^4 & -1,8297 \cdot 10^6 \\ -644,2689 & 930,7745 & 1,6568 \cdot 10^4 \\ 930,7745 & -1344,6887 & -2,3936 \cdot 10^4 \\ 1,6568 \cdot 10^4 & -2,3936 \cdot 10^4 & -4,2609 \cdot 10^5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{N}_{\alpha 2(EA)} &= \begin{bmatrix}
-913,0272 & 1365,1265 & -3,2564 \cdot 10^4 \\
1365,1265 & -2041,0897 & 4,8688 \cdot 10^4 \\
-3,2564 \cdot 10^4 & 4,8688 \cdot 10^4 & -1,1614 \cdot 10^6 \\
913,0272 & -1365,1265 & 3,2564 \cdot 10^4 \\
-1365,1265 & 2041,0897 & -4,8688 \cdot 10^4 \\
3,2564 \cdot 10^4 & -4,8688 & 1,1614 \cdot 10^6 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0
\end{bmatrix} \\
\mathbf{N}_{\alpha 3(EA)} &= \begin{bmatrix}
-131,9616 & 927,9083 & 1,5075 \cdot 10^4 \\
927,9083 & -6524,7276 & -1,0600 \cdot 10^5 \\
1,5075 \cdot 10^4 & -1,0600 \cdot 10^5 & -1,7221 \cdot 10^6 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
131,9616 & -927,9083 & -1,5075 \cdot 10^4 \\
-927,9083 & 6524,7276 & 1,0600 \cdot 10^5 \\
-1,5075 \cdot 10^4 & 1,0600 \cdot 10^5 & 1,7221 \cdot 10^6 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\mathbf{N}_{\alpha 4(EA)} = \begin{bmatrix} -89,1852 & 462,7988 & 1,2774 \cdot 10^4 \\ 462,7988 & -2401,5502 & -6,6288 \cdot 10^4 \\ 1,2774 \cdot 10^4 & -6,6288 \cdot 10^4 & -1,8297 \cdot 10^6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 89,1852 & -462,7988 & -1,2774 \cdot 10^4 \\ -462,7988 & 2401,5502 & 6,6288 \cdot 10^4 \\ -1,2774 \cdot 10^4 & 6,6288 \cdot 10^4 & 1,8297 \cdot 10^6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N}_{\alpha 5(EA)} = \begin{bmatrix} -644,2689 & 930,7745 & 1,6568 \cdot 10^4 \\ 930,7745 & -1344,6887 & -2,3936 \cdot 10^4 \\ 1,6568 \cdot 10^4 & -2,3936 \cdot 10^4 & -4,2609 \cdot 10^5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 644,2689 & -930,7745 & -1,6568 \cdot 10^4 \\ -930,7745 & 1344,6887 & 2,3936 \cdot 10^4 \\ -1,6568 \cdot 10^4 & 2,3936 \cdot 10^4 & 4,2609 \cdot 10^5 \end{bmatrix}$$

Niezbędnym do wyznaczenia wektora lokalnych współczynników wariacji $\hat{\mathbf{y}}$ jest obliczenie macierzy \mathbf{F} oraz wektora $\hat{\mathbf{f}}$. Podczas wyrównania obserwacji z pomiaru pierwotnego przyjęły one postać:

$$\mathbf{F}_{(EP)} = \begin{bmatrix} 363,3012 & -343,0760 & 1,9987 \\ -343,0760 & 328,6267 & -1,9020 \\ 1,9987 & -1,9020 & 2,0309 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{f}}_{(EP)} = \begin{bmatrix} 363,3012 \\ 328,6267 \\ 2,0309 \end{bmatrix}$$

Dla pomiaru aktualnego:

$$\mathbf{F}_{(EA)} = \begin{bmatrix} 3,9852 & 8,6953 \cdot 10^{-7} & 0,0074 \\ 8,6953 \cdot 10^{-7} & 2,0000 & 1,3131 \cdot 10^{-8} \\ 0,0074 & 1,3131 \cdot 10^{-8} & 2,0000 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{f}}_{(EA)} = \begin{bmatrix} 3,9852 \\ 2,0000 \\ 2,0000 \end{bmatrix}$$

4. Podsumowanie

4.1. Porównanie istotności przemieszczeń wyznaczonych w oparciu wykorzystanie estymatora globalnego współczynnika wariancji oraz z zastosowaniem lokalnych współczynników wariancji

Przemieszczenia obliczone w oparciu o współrzędne punktów uzyskane z wyrównania z wykorzystaniem lokalnych współczynników wariancji, z większym prawdopodobieństwem odzwierciedlają rzeczywistą zmianę położenia tych punktów w odstępie czasu między pomiarem pierwotnym a pomiarem aktualnym. Jest to związane z faktem, że metoda ta z większym prawdopodobieństwem prawidłowo odwzorowuje rzeczywiste błędy pomiaru dla jednorodnych grup obserwacji. W tabeli 4.1. przedstawiono zestawienie przemieszczeń pionowych wyznaczonych na podstawie wysokości uzyskanych z wyrównania metodą najmniejszych kwadratów oraz z wykorzystaniem metody Hendersona. Porównanie przemieszczeń poziomych punktów kontrolowanych obliczonych z wykorzystaniem tych dwóch metod wyrównania zestawiono w tabeli 4.2.

Tabela 4.1. Przemieszczenia pionowe wyznaczone na podstawie wyrównania metodą najmniejszych kwadratów oraz z zastosowaniem metody Hendersona (źródło: opracowanie własne)

Punkt	Metoda najmniejszych kwadratów		Metoda Hendersona	
	$\hat{\Delta Z}$ [m]	Istotność	$\hat{\Delta Z}$ [m]	Istotność
<i>st</i>	+0,017	ISTOTNE	+0,011	ISTOTNE
2	+0,025	ISTOTNE	+0,002	NIEISTOTNE
4	+0,047	ISTOTNE	+0,033	ISTOTNE
7	+0,069	ISTOTNE	+0,055	ISTOTNE
12	+0,002	NIEISTOTNE	-0,011	NIEISTOTNE

Tabela 4.2. Przemieszczenia poziome wyznaczone na podstawie wyrównania metodą najmniejszych kwadratów oraz z zastosowaniem metody Hendersona (źródło: opracowanie własne)

Punkt	Metoda najmniejszych kwadratów				Metoda Hendersona			
	$\hat{\Delta X}$ [m]	$\hat{\Delta Y}$ [m]	ΔXY [m]	Istotność	$\hat{\Delta X}$ [m]	$\hat{\Delta Y}$ [m]	ΔXY [m]	Istotność
<i>st</i>	-0,009	-0,002	0,008	ISTOTNE	-0,008	-0,003	0,008	ISTOTNE
2	+0,001	-0,007	0,006	ISTOTNE	+0,001	-0,006	0,006	NIEISTOTNE
4	-0,010	-0,011	0,014	ISTOTNE	-0,009	-0,011	0,014	NIEISTOTNE
7	-0,017	-0,020	0,026	ISTOTNE	-0,016	-0,020	0,026	ISTOTNE
12	+0,006	-0,019	0,005	ISTOTNE	-0,004	-0,003	0,005	NIEISTOTNE

4.2. Wnioski

Opracowanie wyników pomiaru w ramach geodezyjnego systemu monitoringu konstrukcji należy przeprowadzić w taki sposób, aby usunąć wpływ ewentualnych błędów przypadkowych oraz systematycznych. Jako, że przemieszczenia określa się wykorzystując różnice współrzędnych punktów w danym przedziale czasu, należy dążyć do sytuacji, w której niweluje się wpływ szeroko pojętych błędów – zakłóceń. Oba pomiary – pomiar pierwotny i pomiar aktualny powinny być wykonywane w taki sposób i w takich warunkach, aby zapewniały jednakową dokładność. Najczęściej jest to jednak niemożliwe, dlatego przyjęcie jednakowych błędów średnich dla grup obserwacji w obu epokach pomiarowych (wyrównanie klasyczne z globalnym współczynnikiem wariancji) może zniekształcać wyniki wyrównania, a co z tym idzie, także obliczone przemieszczenia. Świadczą o tym wartości współczynnika wariancji m_0^2 wyznaczonego w ramach wyrównania spostrzeżeń w obu epokach. W analizowanym w niniejszej monografii przykładzie, w pierwotnej epoce pomiarowej wartość $m_0^2 = 126,62$, natomiast w epoce aktualnej $m_0^2 = 15,17$. Jak widać, w obu przypadkach jego wartość znacznie przewyższa wartość teoretyczną $m_0^2 = 1$, czyli przyjęte do wyrównania błędy średnie zostały zaniżone. Warto jednak zauważyć, że zaniżenie błędów średnich obserwacji w obu epokach nie jest jednakowe – w epoce pierwotnej wartości błędów średnich zostały bardziej zaniżone niż w analizowanej epoce aktualnej. Zatem obliczone w ten sposób przemieszczenia są w różnym stopniu obciążone wpływem niepoprawnego przyjęcia błędów średnich. W związku z tym, znacznie lepszym rozwiązaniem okazuje się wyrównanie obserwacji z wykorzystaniem lokalnych współczynników wariancji. W procedurze iteracyjnej wyznaczono najbardziej prawdopodobne błędy średnie pomiaru, czyli takie, które najbardziej odpowiadają rzeczywistym niedokładnościom. Przemieszczenia obliczone na podstawie współrzędnych uzyskanych z wyrównania z wykorzystaniem lokalnych współczynników dają dużo bardziej wiarygodny obraz zachowania punktów konstrukcji w analizowanym interwale czasu. Jak pokazały przeprowadzone analizy (tabela 4.1. i tabela 4.2.) wyrównanie prowadzone bez wykorzystania lokalnych współczynników wariancji może zaburzyć proces identyfikacji istotności uzyskanych przemieszczeń punktów kontrolowanych.

Literatura

- [1] Ambroziak A., *Membrane –Hanning roof analysis: an example*, Task Quarterly 10 No 3, 2006, s.267–273.
- [2] Baran L., *Teoretyczne podstawy opracowania wyników pomiarów geodezyjnych*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1999.
- [3] Bryś H., Przewłocki S., *Geodezyjne metody pomiarów przemieszczeń budowli*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1998.
- [4] Burakowska W., *Stalowa konstrukcja z motylim dachem*, Inżynier budownictwa Nr 1 (102), 2014, s. 110–114.
- [5] Duchnowski R., *Estimation of local variance coefficients. Application in three-dimensional networks*, Geodezja i Kartografia t. XLV 3–4, 1996, s. 165–184
- [6] Filipiak-Kowszyk D., Janowski A., Kamiński W., Makowska K., Szulwic J., Wilde K., *The geodetic monitoring of the engineering structure – a practical solution of the problem in 3D space*, Reports On Geodesy And Geoinformatics, vol. 102, 2016, s. 1–14, <https://doi.org/10.1515/rgg-2016-0024> (in print)
- [7] Gierski W.: *Wykorzystanie lokalnych współczynników wariancji w ocenie istotności przemieszczeń poziomych i pionowych dachu Opery Leśnej w Sopocie*, praca dyplomowa magisterska, WILiŚ PG 2016.
- [8] Gierski W.: *Wyznaczanie przemieszczeń poziomych i pionowych na przykładzie dachu Opery Leśnej w Sopocie*, praca dyplomowa inżynierska, WILiŚ PG 2014.
- [9] Gil J., *Pomiary geodezyjne w praktyce inżynierskiej*, Uniwersytet Zielonogórski, Zielona Góra 2007.
- [10] Kamiński W., Nowel K., *Local variance factors in deformation analysis of non-homogenous monitoring networks*, Survey Review, vol. 45, 2013, s. 44–50.
- [11] Lazzarini T. oraz zespół współautorów, *Geodezyjne pomiary przemieszczeń budowli i ich otoczenia*, Państwowe Przedsiębiorstwo Wydawnictw Kartograficznych, Warszawa 1977.
- [12] Prószyński W., Kwaśniak M., *Podstawy geodezyjnego wyznaczania przemieszczeń. Pojęcia i elementy metodyki*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2005.
- [13] Rozporządzenie Ministra Infrastruktury z dnia 12.03.2009 roku, zmieniające rozporządzenie w sprawie warunków technicznych, jakim powinny odpowiadać budynki i ich usytuowanie (Dz.U. 2009 nr 56 poz. 461)
- [14] Ustawa z dnia 17 maja 1989 r. Prawo geodezyjne. Dz.U. 1989 nr 30 poz. 163 ze zm. (tekst jednolity Dz.U. 2016 nr 0 poz. 1629)
- [15] Wilde K., Chróścielewski J., Miśkiewicz M., Rucka M., *Diagnostyka i monitoring nowego przekrycia Opery Leśnej w Sopocie*, XXVI Konferencja Naukowo – Techniczna Awarie Budowlane, Szczecin 2013.
- [16] Wilde K., Kamiński W., Makowska K., Miśkiewicz M., Szulwic J., *System of monitoring of the Forest Opera in Sopot structure and roofing*, in: Proc. 15th International Multidisciplinary Scientific GeoConference 2 (2), June 2015, s. 471–482, <http://dx.doi.org/10.5593/SGEM2015/B22/S9.059>
- [17] Wiśniewski Z., *Estimation of Local Variance Coefficients In Adjustment of Geodetic Networks*, Bollettino di Geodesia e Scienze Affini, Nr XLVIII, 1989, s. 165–180.
- [18] Wiśniewski Z., *Estymacja lokalnych współczynników wariancji po wyrównaniu sieci kątowno-liniowych*, Geodezja i Kartografia, t. XXXVIII, z. 4, 1989.
- [19] Wiśniewski Z., *Lokalne współczynniki wariancji i ich estymacja po wyrównaniu sieci geodezyjnych*, Geodezja i Kartografia, t. XXXIX, z. 95, 1990, s. 89 – 107.
- [20] Wiśniewski Z., *Problem wagowania w niejednorodnych sieciach geodezyjnych*, Instytut Geodezji i Fotogrametrii, ART Olsztyn, 1991, s. 41–53.

- [21] Wiśniewski Z., *Algebra macierzy i statystyka matematyczna w rachunku wyrównawczym (teoria i zadania)*, Wydawnictwo Uniwersytetu Warmińskiego – Mazurskiego w Olsztynie, Olsztyn 2000.
- [22] Wiśniewski Z., *Rachunek wyrównawczy w geodezji (z przykładami)*, Wydawnictwo Uniwersytetu Warmińskiego – Mazurskiego w Olsztynie, Olsztyn 2005.
- [23] Wiśniewski Z., *Zaawansowane metody opracowania obserwacji geodezyjnych z przykładami*, Wydawnictwo Uniwersytetu Warmińskiego – Mazurskiego w Olsztynie, Olsztyn 2013.

Strony internetowe:

- [24] LeicaGeosystems, http://www.leica-geosystems.pl/pl/Leica-Viva-TS15_86198.htm
[dostęp: 08.12.2016]
- [25] strona internetowa SMK (adres zastrzeżony)

Inne:

- [26] Accessory Newsletter – No. 5 Reflector Accuracy

Wykaz rysunków

Rys. 1.1. Sieć niwelacyjna usytuowana na przedpolu zapory (źródło: [3])	9
Rys. 1.2. Wektor przemieszczenia punktu P w przedziale czasu $t - t'$ (źródło: [12]).....	9
Rys. 1.3. Zmiana odległości S oraz zmiana kąta α na skutek odkształcenia się bryły (źródło: [12]).....	11
Rys. 2.1. Figura graniczna błędu wyznaczonego przemieszczenia (źródło: opracowanie własne)	19
Rys. 2.2. Odległość przestrzenna (źródło: opracowanie własne).....	21
Rys. 2.3. Kąt poziomy (źródło: opracowanie własne)	21
Rys. 2.4. Kąt pionowy (źródło: opracowanie własne)	22
Rys. 3.1. Fragment zadaszania Opery Leśnej w Sopocie (źródło: własne).....	24
Rys. 3.2. Przytwierdzenie łuku nośnego do bloku fundamentowego (źródło: własne)	25
Rys. 3.3. Łuki nośne konstrukcji zadaszania Opery Leśnej w Sopocie (źródło: własne).....	26
Rys. 3.4. Interfejs modułu powiadamiania system monitoring konstrukcji dachu Opery Leśnej w Sopocie (źródło: [25]).....	27
Rys. 3.5. Rozmieszczenie punktów referencyjnych oraz punktów kontrolowanych zadaszania Opery Leśnej (źródło: [25]).....	28
Rys. 3.6. Stanowisko tachimetru (źródło: własne).....	29
Rys. 3.7. Punkt referencyjny SMK (źródło: własne)	30
Rys. 3.8. Punkt kontrolowany zlokalizowany na membranie zadaszania Opery Leśnej (źródło: własne).....	30
Rys. 3.9. Wybór punktów kontrolowanych przyjętych do analizy (źródło: opracowanie własne na podstawie [25]).....	31
Rys. 3.10. Przemieszczenie poziome stanowiska tachimetru oraz elipsa błędu tego przemieszczenia (źródło: opracowanie własne)	45
Rys. 3.11. Przemieszczenie poziome punktu kontrolowanego nr 2 oraz elipsa błędu tego przemieszczenia (źródło: opracowanie własne)	46
Rys. 3.12. Przemieszczenie poziome punktu kontrolowanego nr 4 oraz elipsa błędu tego (źródło: opracowanie własne)	46
Rys. 3.13. Przemieszczenie poziome punktu kontrolowanego nr 7 oraz elipsa błędu tego przemieszczenia (źródło: opracowanie własne).....	47
Rys. 3.14. Przemieszczenie poziome punktu kontrolowanego nr 12 oraz elipsa błędu tego przemieszczenia (źródło: opracowanie własne).....	47
Rys. 3.15. Przemieszczenie poziome stanowiska tachimetru oraz elipsa błędu tego przemieszczenia – wyrównanie z wykorzystaniem lokalnych współczynników wariancji (źródło: opracowanie własne)	67
Rys. 3.16. Przemieszczenie poziome punktu kontrolowanego nr 2 oraz elipsa błędu tego przemieszczenia – wyrównanie z wykorzystaniem lokalnych współczynników wariancji (źródło: opracowanie własne)	67
Rys. 3.17. Przemieszczenie poziome punktu kontrolowanego nr 4 oraz elipsa błędu tego przemieszczenia – wyrównanie z wykorzystaniem lokalnych współczynników wariancji (źródło: opracowanie własne)	68
Rys. 3.18. Przemieszczenie poziome punktu kontrolowanego nr 7 oraz elipsa błędu tego przemieszczenia – wyrównanie z wykorzystaniem lokalnych współczynników wariancji (źródło: opracowanie własne)	68
Rys. 3.19. Przemieszczenie poziome punktu kontrolowanego nr 12 oraz elipsa błędu tego przemieszczenia – wyrównanie z wykorzystaniem lokalnych współczynników wariancji (źródło: opracowanie własne)	69

Wykaz tabel

Tabela 3.1. Parametry techniczne tachimetru Leica TS 15I (źródło: [24]).....	29
Tabela 3.2. Współrzędne punktów referencyjnych (źródło: opracowanie własne)	32
Tabela 3.3. Równania poprawek dla odległości przestrzennych d' (źródło: opracowanie własne)	32
Tabela 3.4. Równania poprawek dla kątów poziomych β (źródło: opracowanie własne)	33
Tabela 3.5. Równania poprawek dla kątów pionowych α (źródło: opracowanie własne)	34
Tabela 3.6. Wartości błędów średnich obserwacji przyjęte do wyrównania z wykorzystaniem globalnego współczynnika wariancji (źródło: [24]).....	39
Tabela 3.7. Wartości współczynników m_0^2 wyznaczone w wyrównaniu obserwacji z dwóch niezależnych epok pomiarowych (źródło: opracowanie własne).....	41
Tabela 3.8. Błędy położenia punktów – wyrównanie metodą najmniejszych kwadratów (źródło: opracowanie własne)	44
Tabela 3.9. Współrzędne stanowiska tachimetru i punktów kontrolowanych oraz ich składowe przemieszczenia – wyrównanie metodą najmniejszych kwadratów (źródło: opracowanie własne)	44
Tabela 3.10. Istotność wyznaczonych przemieszczeń pionowych – z wykorzystaniem globalnego współczynnika wariancji (źródło: opracowanie własne).....	44
Tabela 3.11. Parametry elips granicznych wyznaczone dla przemieszczeń punktów – z wykorzystaniem estymatora globalnego współczynnika wariancji (źródło: opracowanie własne)	45
Tabela 3.12. Przemieszczenia punktów z oceną ich istotności – z wykorzystaniem globalnego współczynnika wariancji (źródło: opracowanie własne)	48
Tabela 3.13. Wartości obserwacji (źródło: opracowanie własne).....	48
Tabela 3.14. Obliczone wartości kątów poziomych (źródło: opracowanie własne).....	49
Tabela 3.15. Obliczone wartości kątów pionowych (źródło: opracowanie własne).....	49
Tabela 3.16. Obliczone wartości odległości poziomych (źródło: opracowanie własne)	50
Tabela 3.17. Obliczone przyrosty boków wcinających (źródło: opracowanie własne)	50
Tabela 3.18. Współrzędne przybliżone (źródło: opracowanie własne).....	51
Tabela 3.19. Odległości przestrzenne i poziome obliczone ze współrzędnych przybliżonych (źródło: opracowanie własne)	51
Tabela 3.20. Kąty poziome obliczone ze współrzędnych przybliżonych (źródło: materiały własne)	52
Tabela 3.21. Kąty pionowe obliczone ze współrzędnych przybliżonych (źródło: materiały własne)	52
Tabela 3.22. Wartości lokalnych współczynników wariancji m_{0i}^2 uzyskanych w kolejnych iteracjach (pomiar pierwotny – 16.01.2014; źródło: opracowanie własne)	61
Tabela 3.23. Wartości lokalnych współczynników wariancji m_{0i}^2 uzyskanych w kolejnych iteracjach (pomiar aktualny – 30.06.2014; źródło: opracowanie własne).....	61
Tabela 3.24. Błędy średnie wyróżnionych jednorodnych grup obserwacji (źródło: opracowanie własne)	62
Tabela 3.25. Błędy położenia punktów – wyrównanie z wykorzystaniem lokalnych współczynników wariancji (źródło: opracowanie własne)	65
Tabela 3.26. Współrzędne stanowiska tachimetru i punktów kontrolowanych oraz ich przemieszczenia -wyrównanie z wykorzystaniem lokalnych współczynników wariancji (źródło: opracowanie własne)	65

Tabela 3.27. Istotność wyznaczonych przemieszczeń pionowych – wyrównanie z wykorzystaniem lokalnych współczynników wariancji (źródło: opracowanie własne)	66
Tabela 3.28. Parametry elips granicznych przemieszczeń punktów – wyrównanie z wykorzystaniem lokalnych współczynników wariancji (źródło: opracowanie własne)	66
Tabela 3.29. Przemieszczenia punktów z oceną ich istotności – wyrównanie z wykorzystaniem lokalnych współczynników wariancji (źródło: opracowanie własne)	69
Tabela 3.30. Wartości błędów średnich wyróżnionych jednorodnych grup pomiaru w kolejnych iteracjach wyrównania z wykorzystaniem lokalnych współczynników wariancji (źródło: opracowanie własne)	70
Tabela 4.1. Przemieszczenia pionowe wyznaczone na podstawie wyrównania metodą najmniejszych kwadratów oraz z zastosowaniem metody Hendersona (źródło: opracowanie własne)	92
Tabela 4.2. Przemieszczenia poziome wyznaczone na podstawie wyrównania metodą najmniejszych kwadratów oraz z zastosowaniem metody Hendersona (źródło: opracowanie własne)	92